

VISIT...

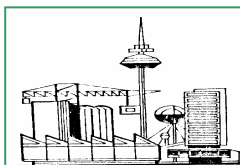
LANZAROTE
Caliente.COM

MIRCEA EUGEN TEODORESCU

STATICA CONSTRUCTIILOR

STRUCTURI STATIC NEDETERMINATE

EDITURA



CONSPRESS

BUCUREȘTI

2005

PREFATĂ

Cursul “*Statica Construcțiilor. Structuri static nedeterminate*” este destinat studenților din anii II și III de la Facultatea de Hidrotehnică.

Cursul este alcătuit din 5 capitole:

Capitolul I – Introducere. În acest capitol sunt prezentate metodele generale pentru calculul structurilor static nedeterminate precum și teoremele de reciprocitate.

Capitolul II – Metoda eforturilor. În acest capitol sunt prezentate în detaliu principiile metodei eforturilor pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate cu aplicare la structurile în formă de cadre la acțiunea forțelor, variației de temperatură și al cedărilor de reazeme.

De asemenea se prezintă modalități de simplificare a calculului în cazul structurilor simetrice.

Capitolul III – Aplicarea metodei eforturilor la rezolvarea unor tipuri particulare de structuri. În acest capitol sunt prezentate în particularitățile ce apar din aplicarea metodei eforturilor la următoarele tipuri de structuri static nedeterminate: grinzi continue, grinzi cu zăbrele și arce. La grinzile continue și la arce se prezintă atât efectul forțelor cât și efectul variației de temperatură și al cedărilor de reazeme.

Capitolul IV – Metoda deplasărilor. În acest capitol sunt prezentate în detaliu principiile metodei deplasărilor pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate. Astfel sunt analizate: structurile cu noduri fixe, structurile cu noduri deplasabile cu stâlpi verticali și structurile cu noduri deplasabile cu stâlpi înclinați și/sau rigle în două pante la acțiunea forțelor, variației de temperatură și al cedărilor de reazeme. De asemenea se prezintă calculul structurilor simetrice prin procedeul semistructurilor și al grupării de necunoscute.

Capitolul V – Aplicații ale metodei deplasărilor. Calcul prin aproximații succesive. În acest capitol sunt prezentate procedee de rezolvare a structurilor static nedeterminate prin aproximații succesive. Astfel pentru structurile cu noduri fixe se prezintă procedeul distribuirii și transmiterii momentelor, iar pentru structurile cu noduri deplasabile procedeul de operare în două etape.

Aspectele teoretice sunt însoțite de numeroase exemple numerice care au rolul de a ajuta studenții în pregătirea lor.

Autorul

CAPITOLUL I

INTRODUCERE

1.1. Generalități

Majoritatea structurilor sunt static nedeterminate. Față de structurile static determinate ele prezintă o serie de avantaje: eforturile rezultă în general mai mici, pot redistribui eforturile dacă există cedări locale și au deplasări mai mici.

Structurile static nedeterminate sunt acele structuri care au un număr mai mare de legături decât cel minim necesar asigurării invariabilității geometrice și fixării de teren și în consecință nu pot fi calculate eforturile folosind numai ecuațiile de echilibru static.

Pentru calculul structurilor static nedeterminate este necesar să se utilizeze atât condiția de echilibru static cât și condiția de continuitate a deformatei, condiții care caracterizează echilibrul în poziția deformată.

Obținerea ecuațiilor necesare pentru determinarea stării de eforturi și deplasări ale structurii impune folosirea concomitentă a acestor două condiții, care devin astfel interdependente. Deci, analiza structurilor static nedeterminate devine mult mai dificilă și mai pretențioasă decât a celor static determinate.

O primă problemă care se pune este aceea a stabilirii parametrilor independenți care pot defini complet răspunsul structurii. Ca parametri independenți se aleg fie forțele din legăturile suplimentare ale structurii, fie deplasările posibile ale nodurilor acesteia.

Considerarea drept parametri, a forțelor de legătură suplimentare, permite exprimarea echilibrului static al structurii pentru orice valori ale acestora. Situația reală de echilibru se realizează pentru acea serie de valori ale parametrilor pentru care este satisfăcută concomitent și condiția de continuitate a deformatei structurii.

Metoda care utilizează ca necunoscute forțele de legătură suplimentare se numește **metoda eforturilor** (metoda forțelor). Numărul necunoscutelor reprezintă gradul de nedeterminare statică al structurii.

Posibilitatea considerării, drept parametri, a deplasărilor nodurilor (rotiri și translații) are la bază faptul că poziția deformată a unei structuri este complet determinată dacă se cunosc aceste deplasări. Alegând ca necunoscute deplasările nodurilor, condiția de continuitate este satisfăcută pentru orice valori ale acestora, deoarece sunt respectate atât legăturile cât și continuitatea barelor. Situația reală de echilibru se realizează pentru acea serie de valori ale parametrilor, pentru care este satisfăcută concomitent și condiția de echilibru static.

Metoda care utilizează ca necunoscute deplasările nodurilor se numește **metoda deplasărilor**. Numărul necunoscutelor reprezintă gradul de nedeterminare geometrică al structurii.

Cele două metode de calcul – metoda eforturilor și metoda deplasărilor – sunt metode generale de calcul, care utilizează cele două condiții pentru exprimarea echilibrului structurii în poziție deformată în ordine diferită. Astfel, în metoda eforturilor se utilizează la început condiția de echilibru static și apoi condiția de continuitate a deformatelor, iar în metoda deplasărilor se începe cu condiția de continuitate și se continuă cu cea de echilibru static.

În capitolele următoare se tratează în detaliu forma clasică a celor două metode generale. În același timp sunt discutate posibilitățile de simplificare a sistemului ecuațiilor de condiție, precum și modalitățile de rezolvare sistematizată a unor categorii particulare de structuri. De asemenea sunt prezentate principalele procedee iterative de calcul.

2.1. Teoreme de reciprocitate

2.1.1. Teorema reciprocității lucrurilor mecanice (teorema lui Betti)

Fie o grindă încărcată cu două forțe (sau două sisteme de forțe) P_i și P_j . Sub acțiunea simultană a celor două forțe grinda se deformează așa cum s-a reprezentat în figura 1.1,a).

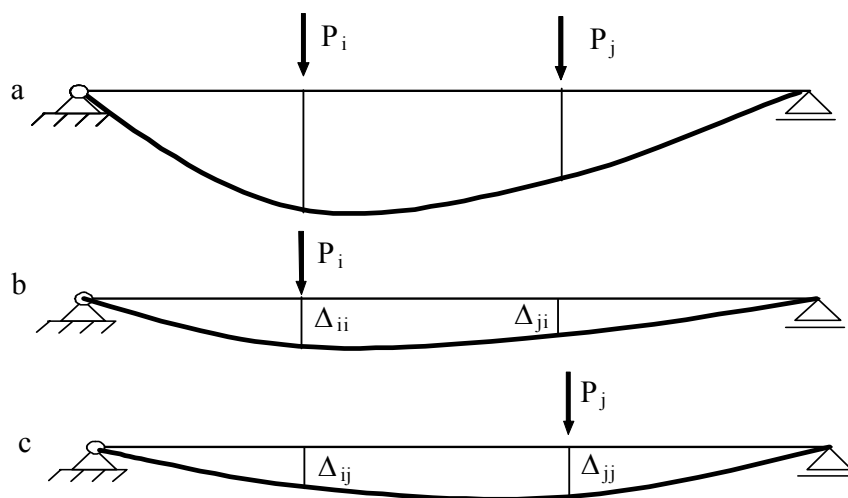


Fig. 1.1

Se consideră grinda în două situații de încărcare:

1. Grinda se încarcă numai cu forța P_i . Sub acțiunea acestei forțe grinda se deformează (fig. 1.1,b). Lucrul mecanic produs de forța P_i este

$$L_{ii} = \frac{1}{2} P_i \cdot \Delta_{ii} \quad (1.1)$$

În relația (1.1) în expresia lucrului mecanic apare coeficientul $\frac{1}{2}$ deoarece atât forța cât și deplasarea cresc de la valoarea zero către valoarea finală.

În această situație se introduce pe grinda și forța P_j , sub acțiunea căreia grinda se deformează în continuare și se ajunge în poziția finală, din figura 1.1,a. Lucrul mecanic produs prin încărcarea cu forța P_j este

$$L_{ij} + L_{ji} = P_i \cdot \Delta_{ij} + \frac{1}{2} P_j \cdot \Delta_{jj} \quad (1.2)$$

De remarcat faptul că în relația (1.2) lucrul mecanic produs de forța P_i nu este multiplicat cu termenul $\frac{1}{2}$ deoarece forța P_i se află pe grindă când s-a introdus forța P_j și deci a parcurs cu toată intensitatea deplasarea Δ_{ij} produsă de forța P_j .

Lucrul mecanic exterior produs de ambele încărcări este

$$L_I = L_{ii} + L_{ij} + L_{ji} = \frac{1}{2} P_i \cdot \Delta_{ii} + P_i \cdot \Delta_{ij} + \frac{1}{2} P_j \cdot \Delta_{jj} \quad (1.3)$$

2. Se consideră acum că se încarcă grinda cu cele două forțe, dar în ordine inversă.

Din încărcarea cu forța P_j se obține deformata din figura 1.1,c și lucrul mecanic

$$L_{jj} = \frac{1}{2} P_j \cdot \Delta_{jj} \quad (1.4)$$

iar din încărcarea în continuare cu forța P_i , lucrul mecanic

$$L_{ji} + L_{ii} = P_j \cdot \Delta_{ji} + \frac{1}{2} P_i \cdot \Delta_{ii} \quad (1.5)$$

Lucrul mecanic al forțelor exterioare în cea de a doua situație de încărcare rezultă

$$L_{II} = L_{jj} + L_{ji} + L_{ii} = \frac{1}{2} P_j \cdot \Delta_{jj} + P_j \cdot \Delta_{ji} + \frac{1}{2} P_i \cdot \Delta_{ii} \quad (1.6)$$

Deoarece poziția finală deformată este aceeași, indiferent de ordinea de încărcare, rezultă:

$$L_I = L_{II} \quad (1.7)$$

sau

$$L_{ii} + L_{ij} + L_{jj} = L_{jj} + L_{ji} + L_{ii} \quad (1.8)$$

de unde se obține

$$L_{ij} = L_{ji} \quad (1.9)$$

Tinând seama de relațiile (1.2) și (1.5), relația (1.9) devine

$$P_i \cdot \Delta_{ij} = P_j \cdot \Delta_{ji} \quad (1.10)$$

Relația (1.9) respectiv (1.10) reprezintă *teorema reciprocității lucrurilor mecanice* și a fost stabilit de Betti. Enunțul acestei teoreme este: **"Lucrul mecanic al sistemului de forțe i parcurgând deplasările produse de sistemul de forțe j este egal cu lucrul mecanic al sistemului de forțe j parcurgând deplasările produse de sistemul de forțe i ".**

Această teoremă se poate aplica în cazul structurilor static determinate și static nedeterminate.

1.2.2. Teorema reciprocității deplasărilor unitare (teorema lui Maxwell)

Prin deplasare unitară se înțelege deplasarea produsă pe o direcție oarecare de o forță egală cu unitatea, acționând asupra structurii. Aceste deplasări se notează astfel:

- δ_{ij} - deplasarea pe direcția i produsă de o forță egală cu unitatea acționând pe direcția j ;
- δ_{ji} - deplasarea pe direcția j produsă de o forță egală cu unitatea acționând pe direcția i .

O deplasare oarecare se poate scrie sub forma

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} \cdot P_j \quad (1.11)$$

$$\Delta_{ji} = \delta_{ji} \cdot P_i \quad (1.12)$$

Relația (1.10) se poate scrie sub următoarea formă

$$\frac{\Delta_{ij}}{P_j} = \frac{\Delta_{ji}}{P_i} \quad (1.13)$$

Tinând seama de expresiile (1.11) și (1.12), relația (1.13) devine

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (1.14)$$

ceea ce reprezintă *teorema reciprocității deplasărilor unitare* și a fost stabilită de Maxwell.

Teorema se enunță astfel: **"Deplasarea produsă pe direcția i de o forță egală cu unitatea acționând pe direcția j este egală cu deplasarea produsă pe direcția j de o forță egală cu unitatea acționând pe direcția i ".**

Această teoremă se poate aplica în cazul structurilor static determinate și static nedeterminate. Deplasarea unitară mai poartă numele și de **flexibilitate**.

1.2.3. Teorema reciprocității reacțiunilor unitare

Această teorema este aplicabilă numai structurilor static nedeterminate.

Prin reacțiune unitară se înțelege reacțiunea ce apare într-o legătură când pe direcția altei legături are loc o deplasare egală cu unitatea. Aceste reacțiuni se notează astfel:

- r_{ij} - reacțiunea ce apare în legătura i produsă de o deplasare egală cu unitatea pe direcția legăturii j ,
- r_{ji} - reacțiunea ce apare în legătura j produsă de o deplasare egală cu unitatea pe direcția legăturii i .

Fie grinda static nedeterminată din figura 1.2,a. Încărcând grinda cu deplasarea Δ_i pe direcția reazemului i , aceasta se deformează și în toate legăturile apar reacțiuni (fig.1.2,b). Astfel în reazemul i apare reacțiunea R_{ii} , iar în reazemul j apare reacțiunea R_{ji} . Încărcând grinda cu deplasarea Δ_j pe direcția reazemului j , aceasta se deformează și în toate legăturile apar reacțiuni (fig.1.2,c). Astfel în reazemul i apare reacțiunea R_{ij} , iar în reazemul j apare reacțiunea R_{jj} .

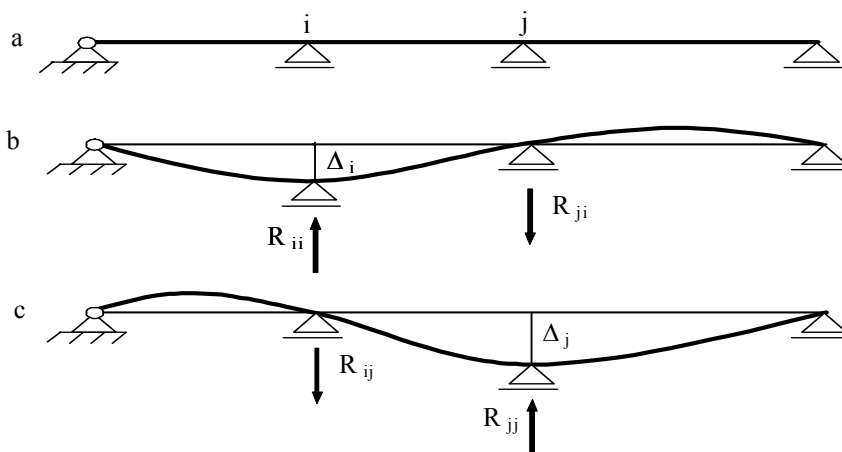


Fig. 1.2

Aplicând teorema lui Betti pentru cele două situații de încărcare rezultă:

$$R_{ij} \cdot \Delta_i = R_{ji} \cdot \Delta_j \quad (1.15)$$

Dacă $\Delta_i = \Delta_j = 1$ și se notează cu r reacțiunile care apar ca urmare a încărcării cu deplasările unitate, rezultă

$$1 \cdot r_{ij} = 1 \cdot r_{ji} \quad (1.16)$$

sau

$$r_{ij} = r_{ji} \quad (1.17)$$

Relația (1.17) reprezintă teorema reciprocității reacțiunilor unitare și se enunță astfel: **"Reacțiunea din legătura i datorată încărcării cu o deplasare egală cu unitatea după direcția legăturii j este egală cu reacțiunea din legătura j datorată încărcării cu o deplasare egală cu unitatea după direcția legăturii i ".**

Reacțiunile unitare se mai pot nota și astfel

$$r_{ij} = k_{ij} \quad (1.18)$$

unde k_{ij} se numeste **rigiditate**.

Tinând seama de (1.18), relația (1.17) capătă forma

$$k_{ij} = k_{ji} \quad (1.19)$$

CAPITOLUL II

METODA EFORTURILOR

2.1. Principiile generale ale metodei eforturilor

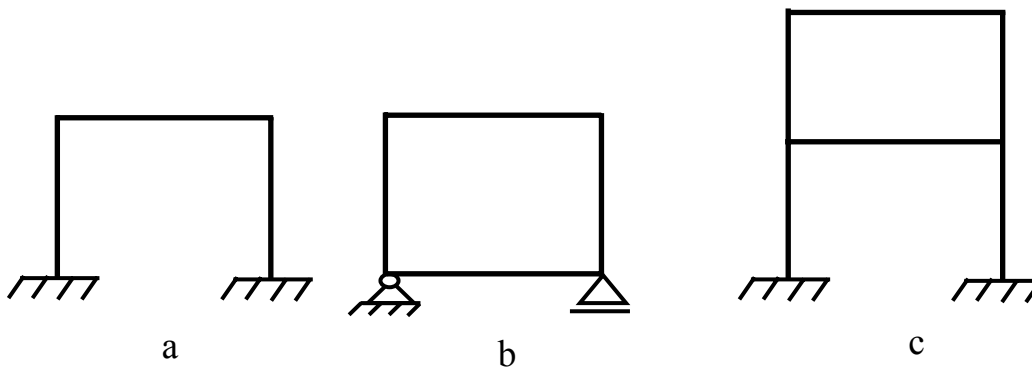
În acest paragraf vor fi prezentate principiile generale ale metodei eforturilor cu exemplificări la structurile în formă de cadre. În ceea ce privește celelalte tipuri de structuri static nedeterminate (grinzi continue, arce, grinzi cu zăbrele), acestea vor fi analizate în capitolul 3.

2.1.1. Stabilirea gradului de nedeterminare statică

Gradul de nedeterminare statică al unei structuri reprezintă diferența dintre numărul total al necunoscutelor și numărul ecuațiilor de echilibru static ce se pot scrie. El este egal cu numărul legăturilor suplimentare pe care le are structura, față de cel minim necesar asigurării invariabilității geometrice și fixării în plan. În analiza oricărei structuri stabilirea gradului de nedeterminare statică reprezintă prima etapă de calcul.

După poziția legăturilor suplimentare se disting trei categorii de nedeterminări:

- nedeterminare exterioară, când numărul legăturilor cu baza de susținere este mai mare decât numărul minim necesar fixării structurii în plan (fig.2.1,a);
- nedeterminare interioară, când surplusul de legături provine din însuși modul de alcătuire a structurii, aceasta fiind fixată față de teren prin numărul minim necesar (fig.2.1,b);
- nedeterminare mixtă, când legăturile suplimentare sunt atât față de teren cât și între barele ce alcătuiesc structura (fig.2.1,c).



- Fig.2.1 -

Stabilirea gradului de nedeterminare statică se poate face pe mai multe căi:

- utilizând *relația generală*

$$N = l + r - 3c > 0 \quad (2.1)$$

în care l reprezintă numărul legăturilor simple dintre corpuri, r numărul legăturilor simple cu terenul, iar c este numărul corpurilor (barelor) ce alcătuiesc structura.

- utilizând *procedeul conturilor închise*. Prin contur închis se înțelege conturul format din bare sau bare și teren între care există numai legături de încastrare. Pentru stabilirea gradului de nedeterminare statică se pleacă de la faptul că un contur închis este de trei ori static nedeterminat. Dacă structura este alcătuită din C contururi închise, atunci gradul de nedeterminare statică este $N = 3 \cdot C$. La calculul numărului conturilor închise trebuie să se țină seama ca fiecare contur să cuprindă o bară nouă, care să nu facă parte din altul. Consola nu se ia în considerație la stabilirea numărului de contururi închise deoarece este un element static determinat. Aici trebuie făcută observația importantă că lipsa unei legături simple din contur micșorează cu o unitate gradul de nedeterminare statică. Astfel, o articulație scade cu o unitate gradul de nedeterminare statică, iar un reazem simplu cu două unități.

Rezultă atunci relația

$$N = 3 \cdot C - A - 2S \quad (2.2)$$

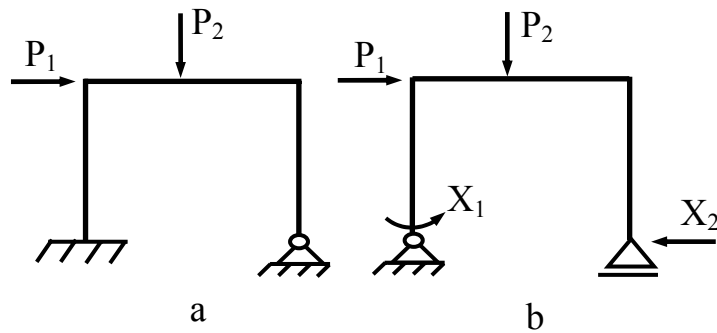
unde A reprezintă numărul de articulații simple, iar S numărul reazemelor simple.

Observație: O articulație simplă leagă două bare între ele. Pentru cazul general când într-un nod articulat se întâlnesc mai multe bare, numărul articulațiilor simple care intervine în relația (2.2) este egal cu numărul de bare minus unu.

2.1.2. Alegerea sistemului de bază

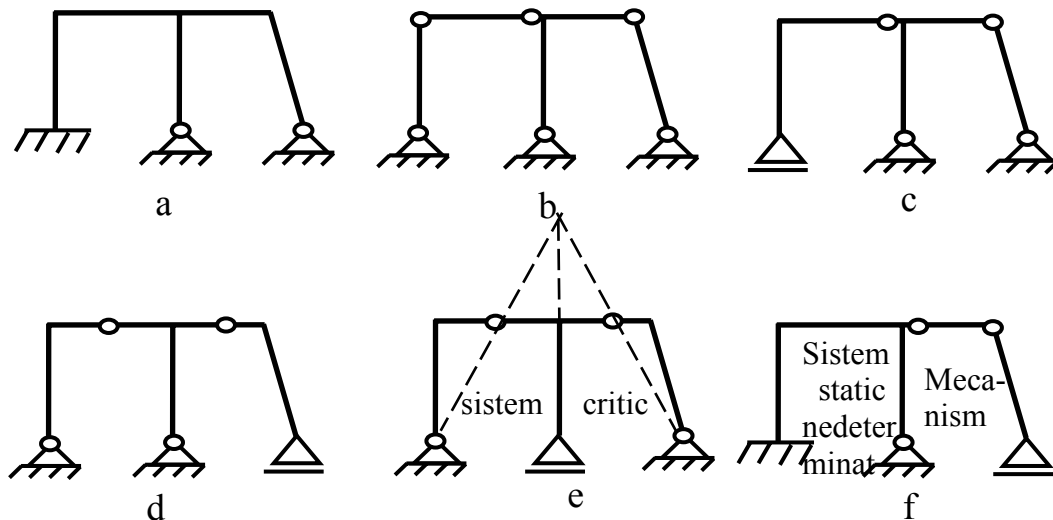
În metoda eforturilor, necunoscutele sunt eforturile dintr-o secțiune oarecare și/sau reacțiunile. Numărul de necunoscute este egal cu gradul de nedeterminare statică a structurii. Pentru calculul practic se înlocuiesc legăturile suplimentare prin echivalentul mecanic corespunzător (forță, moment, perechi de forțe sau de momente).

Sistemul astfel obținut poartă denumirea de sistem de bază și este static determinat. El este încărcat cu forțele exterioare și cu necunoscutele alese, notate cu X_i (fig.2.2,b) și trebuie să se comporte identic cu structura dată.



- Fig.2.2-

Alcătuirea sistemului de bază este determinată de legăturile care sunt considerate suplimentare. Pentru o structură dată (fig.2.3,a), pot fi alese mai multe sisteme de bază, în funcție de legăturile suprimate (fig.2.3,b,c,d,e,f). Datorită existenței mai multor posibilități de alegere a sistemului de bază, un anumit sistem poate prezenta avantaje față de celelalte. Asupra avantajelor ce rezultă din alegerea judicioasă a sistemului de bază se va reveni ulterior. Un lucru foarte important îl reprezintă faptul că sistemul de bază trebuie alcătuit corect din punct de vedere static. În figura 2.3,e,f sunt prezentate două exemple de alcătuiri incorecte.



- Fig.2.3 -

2.1.3. Alcătuirea sistemului ecuațiilor de condiție

Sistemul de bază se încarcă cu forțele date și cu necunoscutele. Sub acțiunea acestor forțe el este în echilibru, oricare ar fi valorile date necunoscutele. Pentru a obține soluția problemei este necesar să se utilizeze condiția de compatibilitate a deformatelor cu legăturile, condiție care poate fi interpretată astfel: *mărimile și sensurile necunoscutele trebuie să rezulte în așa fel încât sistemul de bază să se deformeze identic cu structura reală static*

nedeterminată și să aibă aceeași distribuție de eforturi. Condiția care se impune sistemului de bază este ca deplasările totale pe direcțiile necunoscutelor să fie egale cu zero, deoarece pe aceste direcții există în realitate legături. Pentru o structură de n ori static nedeterminată ecuațiile de condiție sunt:

$$\Delta_1=0, \Delta_2=0, \dots, \Delta_n=0 \quad (2.3)$$

Deplasările totale Δ_i sunt produse atât de forțele date cât și de necunoscutele X_i acționând pe sistemul de bază și se obțin prin suprapunere de efecte.

De exemplu deplasarea Δ_i are expresia:

$$\Delta_i = \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{ip} = 0 \quad (2.4)$$

Relația (2.4) reprezintă condiția de compatibilitate a deformatelor cu legătura de pe direcția necunoscutei X_i . Scriindu-se câte o ecuație de forma (2.4) pentru fiecare dintre deplasările pe direcțiile necunoscutelor, se obține forma dezvoltată a condițiilor (2.3)

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Necunoscutele, coeficienții necunoscutelor și termenii liberi au următoarea semnificație fizică:

- necunoscutele sunt forțe generalizate,
- coeficienții necunoscutelor sunt deplasări unitare produse pe direcțiile necunoscutelor când sistemul de bază este încărcat succesiv cu $X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$;
- termenii liberi sunt deplasările pe direcțiile necunoscutelor când sistemul de bază este încărcat cu forțele exterioare.

Pentru structurile în formă de cadre, la care efectul momentului încovoietor este predominant, expresiile coeficienților necunoscutelor și ale termenilor liberi sunt

$$\delta_{ii} = \int \frac{m_i^2}{EI} dx; \delta_{ij} = \delta_{ji} = \int \frac{m_i m_j}{EI} dx; \Delta_{ip} = \int \frac{m_i M_p^0}{EI} dx \quad (2.6)$$

unde m_i, m_j, M_p^0 au fost obținute pe sistemul de bază încărcat succesiv cu $X_i=1, X_j=1$, respectiv cu forțele exterioare.

Din analiza expresiilor (2.6) se desprind următoarele:

- coeficienții δ_{ii} se calculează integrând diagama m_i , obținută prin încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta $X_i=1$, cu ea însăși. Acești coeficienți sunt totdeauna pozitivi;

- coeficienții δ_{ij} se calculează integrând diagama m_i cu diagrama m_j , aceste diagrame fiind obținute din încărcarea succesivă a sistemului de bază cu $X_i=1$ și $X_j=1$. Coeficienții δ_{ij} pot fi pozitivi, negativi sau nuli. În baza teoremei reciprocității deplasărilor unitare rezultă $\delta_{ij} = \delta_{ji}$;

- termenii liberi Δ_{ip} se calculează integrând diagrama M_p^0 , diagrama obținută prin încărcarea sistemului de bază cu forțele exterioare, cu diagrama m_i . Termenii liberi pot fi pozitivi, negativ, sau nuli. Cel puțin un termen liber trebuie să fie diferit de zero pentru a nu se obține soluția banală ($X_i=0$, pentru $i=1,n$).

Se observă că numai termenii liberi depind de forțele exterioare date, în timp ce coeficienții necunoscutelor depind numai de caracteristicile structurii și de natura materialului din care se execută structura. Astfel, în cazul mai multor ipoteze de încărcare, păstrând același sistem de bază, în sistemul de ecuații se schimbă numai termenii liberi.

Dupa determinarea necunoscutelor $X_1, X_2, \dots, X_n$ se poate trece la trasarea diagramelor de eforturi. Momentele încovoietoare într-o secțiune curentă se determină prin suprapunere de efecte astfel:

$$M_p = M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + m_n X_n \quad (2.7)$$

Este foarte important ca după trasarea diagramei de moment încovoietor pe structura reală să se facă verificarea rezultatelor obținute. Pentru aceasta se folosesc cele două condiții:

- *condiția de echilibru static*. Se verifică mai întâi echilibrul tuturor nodurilor ($\sum M_{\text{nod}} = 0$). Deoarece, diagrama M_p a fost obținută prin suprapunere de efecte, iar diagramele unitare m_i și diagrama M_p^0 respectă condiția de echilibru static, rezultă că și diagrama finală M_p respectă condiția de echilibru static. Verificarea statică nu dă asigurarea că diagrama de moment încovoietor este corectă, deoarece pot fi greșeli la calculul termenilor din sistemul ecuațiilor de condiție sau la rezolvarea acestuia;

- *condiția de continuitate*. Se calculează deplasările pe direcția legăturilor structurii reale, care în realitate sunt nule. În ceea ce privește modul de calcul al acestor deplasări se va discuta în paragraful următor.

Pentru determinarea forțelor tăietoare se detașează fiecare bară din structură încărcată cu forțele exterioare care-i revin și cu momentele de la extremități sale luate din diagrama M_p .

Forțele axiale se determină din echilibru de nod utilizând ecuațiile de proiecție.

Observație. Calculul practic al structurilor static nedeterminate prin metoda eforturilor, implică parcurgerea următoarelor etape:

- se stabilește gradul de nedeterminare statică a structurii,
- se alege sistemul de bază,
- se trasează diagramele unitare m_i și M_p^0 , pe sistemul de bază,
- se calculează coeficienții necunoscutelor δ_{ii} și δ_{ij} și termenii liberi Δ_{ip} ,
- se rezolvă sistemul de ecuații și se obțin necunoscutele X_i ,
- se determină diagrama finală de momente încovoietoare M_p ,
- se verifică diagrama M_p (așa cum se va arăta în paragraful următor),
- se calculează forțele tăietoare,
- se calculează forțele axiale.

2.1.4. Calculul deplasărilor la structuri static nedeterminate

Expresia generală a deplasărilor punctuale este valabilă oricare ar fi structura, static determinată sau static nedeterminată, deoarece la deducerea ei nu s-a făcut nici o restricție în acest sens.

În cazul încărcării cu forțe, calculul deplasărilor se efectuează utilizând formula Maxwell-Mohr. Deplasarea pe direcția i la o structură static nedeterminată, la care se ține cont numai de efectul încovoierii, are expresia:

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M_p}{EI} dx \quad (2.8)$$

unde atât diagrama m_i cât și diagrama M_p sunt tratate pe structura reală.

În momentul calculului deplasării elastice, diagrama M_p este cunoscută în timp ce pentru obținerea diagramei m_i va trebui rezolvată din nou structura static nedeterminată având ca încărcare o forță unitate acționând pe direcția i . Folosind relația (2.8) volumul de calcule necesare determinării deplasării elastice este mare.

Tinând cont de faptul că o diagramă de moment încovoietor pe o structură static nedeterminată se obține printr-o suprapunere de efecte, calculate pe un sistem de bază, respectiv pentru m_i avem o expresie asemănătoare cu (2.7)

$$m_i = m_i^0 + m_1 X_1' + m_2 X_2' + \dots + m_n X_n' \quad (2.9)$$

Introducând relația (2.9) în (2.8) se obține:

$$\Delta_i = \int \frac{m_i^0 M_p}{EI} dx + X_1' \int \frac{m_1 M_p}{EI} dx + X_2' \int \frac{m_2 M_p}{EI} dx + \dots + X_n' \int \frac{m_n M_p}{EI} dx \quad (2.10)$$

În relația (2.10) se observă că termenul $\int \frac{m_1 M_p}{EI} dx$ reprezintă deplasarea pe direcția necunoscută X_1 , termenul $\int \frac{m_2 M_p}{EI} dx$ reprezintă deplasarea pe direcția necunoscută X_2 , șamd. Aceste deplasări sunt egale cu zero deoarece sunt deplasări pe direcțiile unor legături existente în structura reală. Rezultă că deplasarea Δ_i pe o structură static nedeterminată se poate calcula și cu relația:

$$\Delta_i = \int \frac{m_i^0 M_p}{EI} dx \quad (2.11)$$

unde m_i^0 este diagrama obținută din încărcarea cu forța unitate a oricărui sistem de bază derivat din structura reală.

În ceea ce privește verificarea rezultatelor calculelor, dacă termenii $\int \frac{m_1 M_p}{EI} dx$, $\int \frac{m_2 M_p}{EI} dx$, etc sunt zero, atunci diagrama de moment încovoietor M_p este corectă.

EXEMPLUL 2.1. Să se traseze diagramele de eforturi la structura static nedeterminată din figura 2.4 și să se calculeze deplasarea pe orizontală a secțiunii 2. Se consideră $EI=10^5 \text{ kNm}^2$.

Cadrul este de două ori static nedeterminat

$$N = 3C - A - 2S = 3 \cdot 2 - 2 - 2 \cdot 1 = 2$$

Sistemul de bază a fost ales îndepărtând legătura corespunzătoare reacțiunii orizontale din articulația din dreapta și reazemul simplu. Forțele care reprezintă echivalentul mecanic al acestor legături sunt necunoscutele X_1 și X_2 .

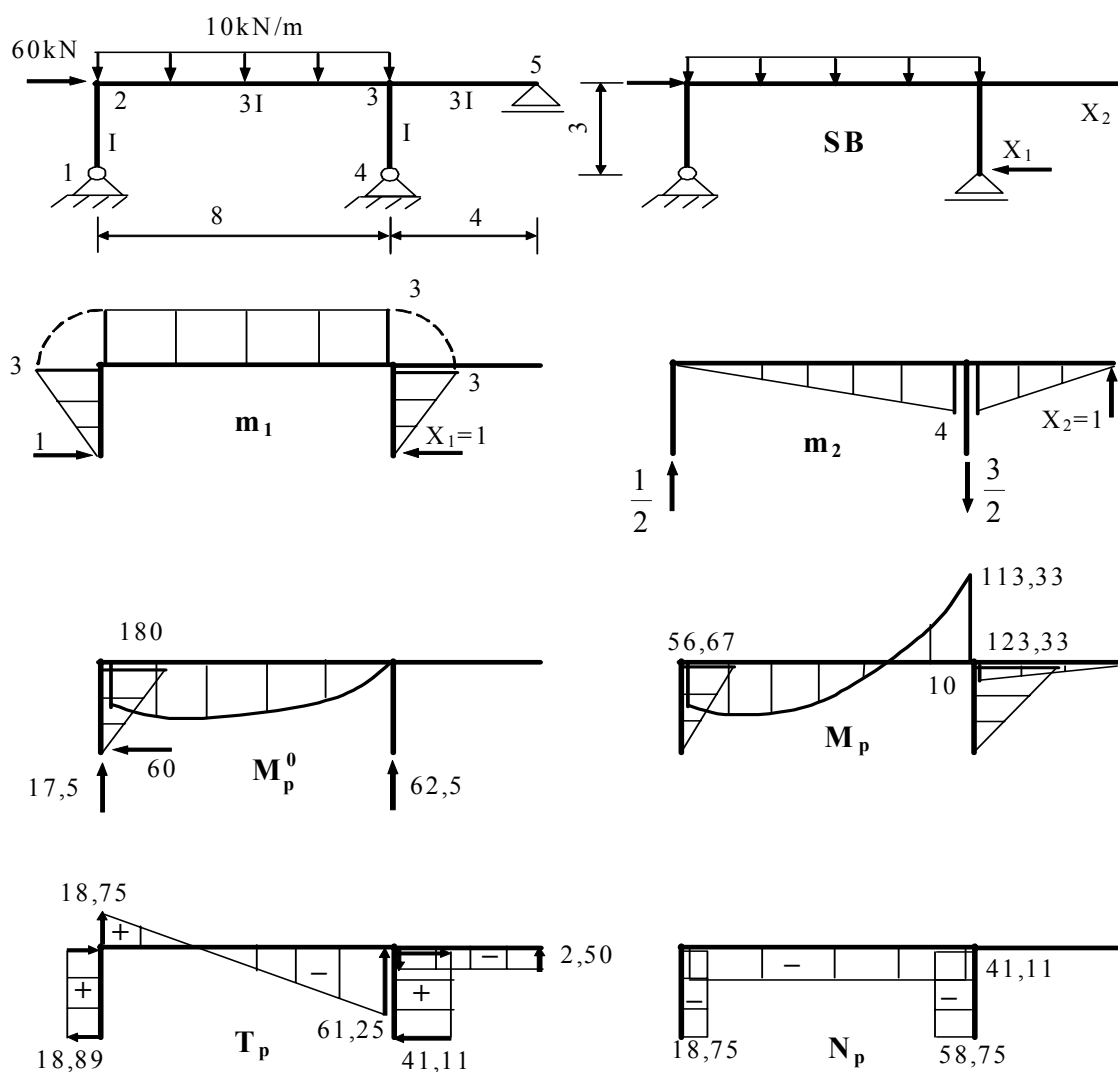
Condiția care se impune sistemului de bază este ca deplasările totale pe direcțiile celor două necunoscute să fie egale cu zero, deoarece pe aceste direcții există în realitate legături, deci

$$\Delta_1=0 \text{ și } \Delta_2=0$$

sau sub formă dezvoltată

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Pentru calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi este necesar să se cunoască diagramele unitare m_1 și m_2 și diagrama M_p^0 . Aceste diagrame (fig.2.4) se obțin prin încărcarea sistemului de bază succesiv cu necunoscutele $X_1=1$, $X_2=1$ și cu forțele exterioare.



- Fig.2.4 -

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi:

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3EI} \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{42}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -\frac{16}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{64}{3EI}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 180 \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \frac{10 \cdot 8^2}{8} \cdot 3 \right) = \\ &= -\frac{5060}{3EI} \end{aligned}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 180 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \frac{10 \cdot 8^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = \frac{5440}{9EI}$$

Sistemul de ecuații are forma

$$\begin{cases} \frac{42}{EI} X_1 - \frac{16}{EI} X_2 - \frac{5060}{3EI} = 0 \\ -\frac{16}{EI} X_1 + \frac{64}{3EI} X_2 + \frac{5440}{9EI} = 0 \end{cases}$$

Se observă că produsul EI se simplifică. Aceasta înseamnă că în cazul încărcării cu forțe, necunoscutele nu depind de natura materialului (E) și nici de valoarea absolută a momentelor de inerție, ci numai de rapoartele acestora.

Necunoscutele au următoarele valori

$$X_1 = 41,11 \quad X_2 = 2,50$$

Momentele încovoietoare reale se obțin cu relația

$$M_p = M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2$$

și au la capetele barelor următoarele valori:

$$M_{21} = 180 - 3 \cdot 41,11 + 0 = 56,67 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 180 - 3 \cdot 41,11 + 0 = 56,67 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = 0 - 3 \cdot 41,11 + 4 \cdot 2,50 = -113,33 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = 0 - 3 \cdot 41,11 + 0 = -123,33 \text{ kNm}$$

$$M_{35} = 0 + 4 \cdot 2,50 = 10 \text{ kNm}$$

Cu aceste valori a fost construită diagrama de moment încovoietor pe structura reală (fig.2.4).

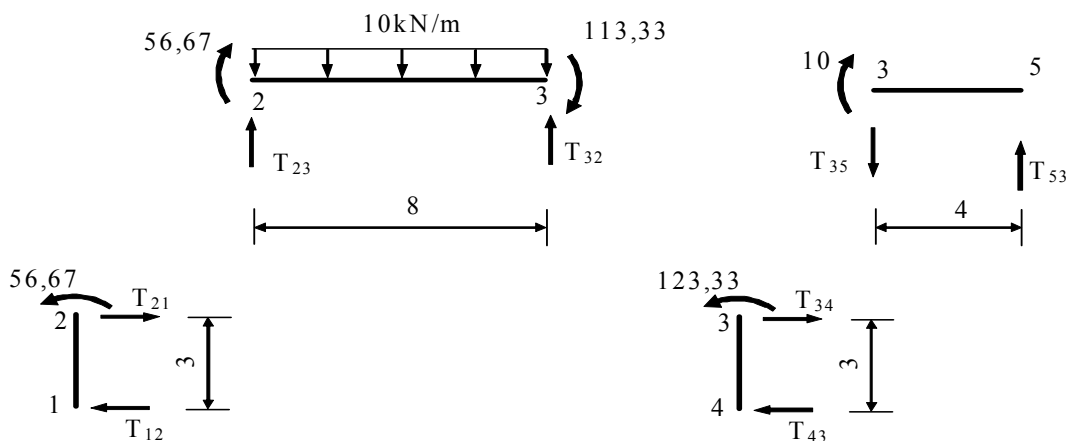
Pentru verificarea rezultatelor obținute se calculează deplasările pe direcțiile necunoscutele, care în realitate sunt nule. Astfel se utilizează relația (2.11) în care m_i^0 se va considera m_1 respectiv m_2 , diagrame care au fost deja trasate.

$$\Delta_1 = \int \frac{m_1 M_p}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 56,67 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 56,67 \cdot 3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 113,33 \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \frac{10 \cdot 8^2}{8} \cdot 3 \right) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 123,33 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{0,05}{EI} \approx 0$$

$$\Delta_2 = \int \frac{m_2 M_p}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 56,67 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 113,33 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \frac{10 \cdot 8^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) + \\ + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{0,03}{EI} \approx 0$$

În consecință diagrama de momente încovoietoare este corectă.

Pentru calculul forțelor tăietoare se detașează fiecare bară din structură încărcată cu forțele exterioare care-i revin și cu eforturile de la extremitățile sale - dintre care momentele încovoietoare sunt cunoscute - și se scriu ecuațiile de echilibru static (fig.2.5).



- Fig.2.5 -

Bara 1-2

$$\begin{cases} \sum M_1 = 0; & -56,67 + T_{21} \cdot 3 = 0; & T_{21} = 18,89 \\ \sum M_2 = 0; & T_{12} \cdot 3 - 56,67 = 0; & T_{12} = 18,89 \end{cases}$$

Bara 2-3

$$\begin{cases} \sum M_2 = 0; & 56,67 + 10 \cdot 8 \cdot 4 + 113,33 - T_{32} \cdot 8 = 0; & T_{32} = 61,25 \\ \sum M_3 = 0; & 56,67 + T_{23} \cdot 8 - 10 \cdot 8 \cdot 4 + 113,33 = 0; & T_{23} = 18,75 \end{cases}$$

Bara 3-4

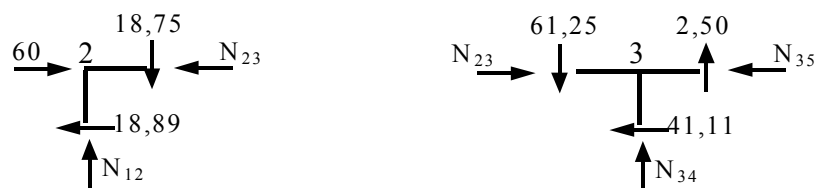
$$\begin{cases} \sum M_3 = 0; & -123,33 + T_{43} \cdot 3 = 0; & T_{43} = 41,11 \\ \sum M_4 = 0; & T_{34} \cdot 3 - 123,33 = 0; & T_{34} = 41,11 \end{cases}$$

Bara 3-5

$$\begin{cases} \sum M_3 = 0; & 10 - T_{53} \cdot 4 = 0; & T_{53} = 2,50 \\ \sum M_5 = 0; & 10 - T_{35} \cdot 4 = 0; & T_{35} = 2,50 \end{cases}$$

Diagrama de forță tăietoare a fost trasată în figura 2.4.

Pentru calculul forțelor axiale din bare se izolează fiecare nod încărcat cu forțele concentrate date și cu eforturile (forțele tăietoare determinate anterior și forțele axiale necunoscute) din secțiunile imediat vecine și se scriu ecuațiile de proiecție (fig.2.6).



- Fig.2.6 -

Nodul 2

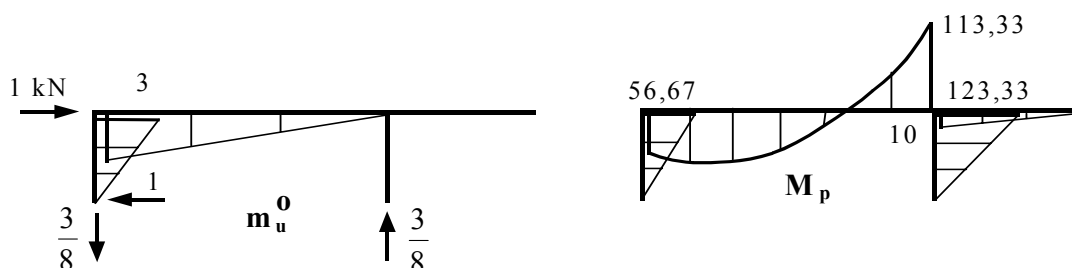
$$\begin{cases} \sum X_i = 0; & 60 - 18,89 - N_{23} = 0; & N_{23} = 41,11 \text{ kN} \\ \sum Y_i = 0; & N_{12} - 18,75 = 0; & N_{12} = 18,75 \text{ kN} \end{cases}$$

Nodul 3

$$\begin{cases} \sum X_i = 0; & N_{23} - 41,11 - N_{35} = 0; & N_{35} = 0 \\ \sum Y_i = 0; & N_{34} - 61,25 - 2,50 = 0; & N_{34} = 58,75 \text{ kN} \end{cases}$$

Diagrama de forță axială a fost trasată în figura 2.4.

Calculul deplasării u_2 . Pentru calculul deplasării pe orizontală a secțiunii 2 este necesar să se traseze o diagramă unitară produsă de o forță orizontală egală cu unitatea ce acționează în secțiunea respectivă pe orice sistem de bază derivat din structura reală. Dacă se alege același sistem de bază, diagrama unitară este prezentată în figura 2.7.



- Fig.2.7 -

Tinând cont de relația (2.11) deplasarea u_2 este:

$$\begin{aligned} u_2 = \int \frac{m_{u_2}^0 M_p}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 56,67 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 56,67 \cdot \frac{2}{3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 113,33 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \frac{10 \cdot 8^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{383,33}{EI} = 383,33 \times 10^{-5} \text{ m} \end{aligned}$$

2.2. Posibilități de simplificare a calculului

La aplicarea metodei eforturilor, scrierea și mai ales, rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție reprezintă operațiile cele mai laborioase, în cazul soluționării manuale a problemei. Dintre posibilitățile de simplificare a calculului se menționează:

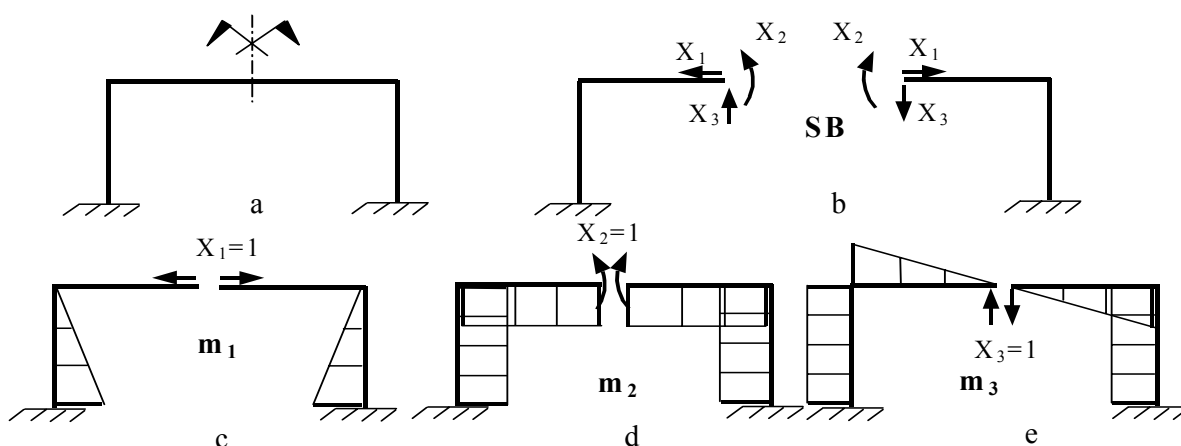
- alegerea judicioasă a sistemului de bază;
- utilizarea necunoscutelor grupate;
- ortogonalizarea diagramelor unitare;
- utilizarea simetriei structurilor.

În continuare se va analiza numai ultimul procedeu.

2.2.1. Utilizarea simetriei structurilor

Structurile simetrice reprezintă o categorie de structuri frecvent întâlnite în practică. Utilizarea proprietăților de simetrie a structurilor conduce la reducerea volumului de calcul necesar rezolvării acestora.

Fie cadrul simetric din fig.2.8,a și sistemul de bază din fig 2.8,b obținut prin secționarea riglei în axa de simetrie. Se observă că necunoscutele X_1 și X_2 sunt necunoscute simetrice, iar necunoscuta X_3 este necunoscută antisimetrică. În consecință, diagramele unitare m_1 și m_2 rezultă simetrice (figura 2.8,c și d) iar diagrama unitară m_3 antisimetrică (figura 2.8,e).



- Fig. 2.8 -

Sistemul general al ecuațiilor de condiție, pentru structura de trei ori static nedeterminată este:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} + 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} + 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} + 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Calculând coeficienții necunoscutelor rezultă că $\delta_{12}=\delta_{21}=\delta_{23}=\delta_{32}=0$, deoarece reprezintă rezultatul integrării diagramelor simetrice m_1 și m_2 cu diagrama antisimetrică m_3 . În consecință sistemul general de ecuații se descompune în două sisteme: un sistem de două ecuații cu două necunoscute -

corespunzător necunoscutelor simetrice, și o ecuație cu o singură necunoscută - corespunzător necunoscutei antisimetrice.

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Descompunerea sistemului de ecuații în două sisteme conduce evident la simplificarea alcătuirii și rezolvării acestora. De remarcat faptul că, această simplificare a fost obținută ținând cont numai de proprietățile de simetrie ale structurii și utilizând un sistem de bază simetric.

Rezolvarea structurilor simetrice poate fi în continuare simplificată dacă se ține seama de caracteristica încărcărilor exterioare. Încărcarea poate fi simetrică, antisimetrică sau oarecare, aceasta din urmă putând fi descompusă într-o încărcare simetrică și una antisimetrică.

Dacă încărcarea exterioară este simetrică, diagrama M_p^0 este simetrică și rezultă că $\Delta_{3p}=0$ și $X_3=0$, rămânând de rezolvat numai sistemul format din primele două ecuații.

Dacă încărcarea exterioară este antisimetrică, diagrama M_p^0 este antisimetrică. Rezultă că $\Delta_{1p}=0$, $\Delta_{2p}=0$ și $X_1=X_2=0$, rămânând de rezolvat numai ecuația care conține necunoscuta antisimetrică.

Aceste rezultate conduc la următoarele concluzii:

- în cazul structurilor simetrice încărcate simetric, eforturile simetrice din secțiunea de pe axa de simetrie sunt diferite de zero, iar eforturile antisimetrice sunt egale cu zero,
- în cazul structurilor simetrice încărcate antisimetric, eforturile simetrice din secțiunea de pe axa de simetrie sunt egale cu zero, iar eforturile antisimetrice sunt diferite de zero.

Pornind de la această observație și de la caracteristicile deformatelor structurii simetrice în cazul încărcărilor particulare se poate trece la utilizarea unui procedeu specific de rezolvare, procedeu numit **procedeu semistructurilor**.

Acest procedeu constă în rezolvarea unei structuri operând numai pe jumătate din structura reală.

Semistructura este o structură convențională, obținută prin secționarea structurii reale în axa de simetrie și introducerea în această secțiune a unor legături care să aibă același efect ca și partea din structură îndepărtată.

Semistructura obținută se va rezolva numai pentru încărcarea ce îi revine, iar diagramele de eforturi pe structura reală se obțin prin transpunere simetrică sau antisimetrică, după tipul de încărcare și diagrama trasată.

Stabilirea tipului de legătură ce trebuie introdusă în axa de simetrie se face având în vedere următoarele:

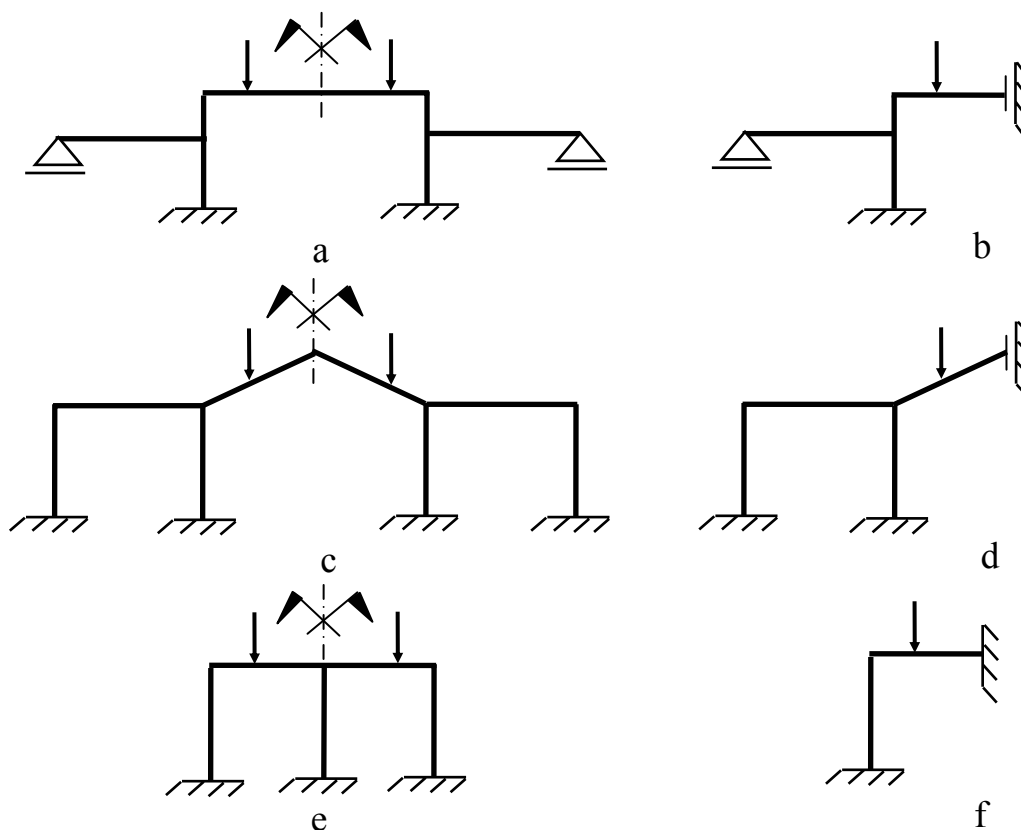
- tipul de încărcare;

- particularitatea structurii în axa de simetrie.

Din acest ultim punct de vedere se pot întâlni trei cazuri:

- axa de simetrie intersectează o bară la mijlocul ei,
- axa de simetrie intersectează un nod format din două bare ce se întâlnesc sub un unghi oarecare,
- axa de simetrie se suprapune peste axa unei bare.

A) *Cazul încărcării simetrice.* La structurile din figura 2.9,a și c deformată este simetrică, iar secțiunea de pe axa de simetrie are numai deplasare pe direcția axei de simetrie ($u=0, v \neq 0, \theta=0$). În această secțiune, dintre cele trei eforturi (M, N și T), două sunt diferite de zero ($M \neq 0, N \neq 0$) ca eforturi simetrice și al treilea este egal cu zero ($T=0$) ca efort antisimetric. Rezultă de aici că legătura ce urmează a fi introdusă în axa de simetrie și care să respecte atât condiția cinematică cât și condiția statică, este o încastrare glisantă (fig.2.9,b și d). Aceasta are ca echivalent mecanic un moment și o forță orizontală și permite deplasarea numai pe direcția axei de simetrie.

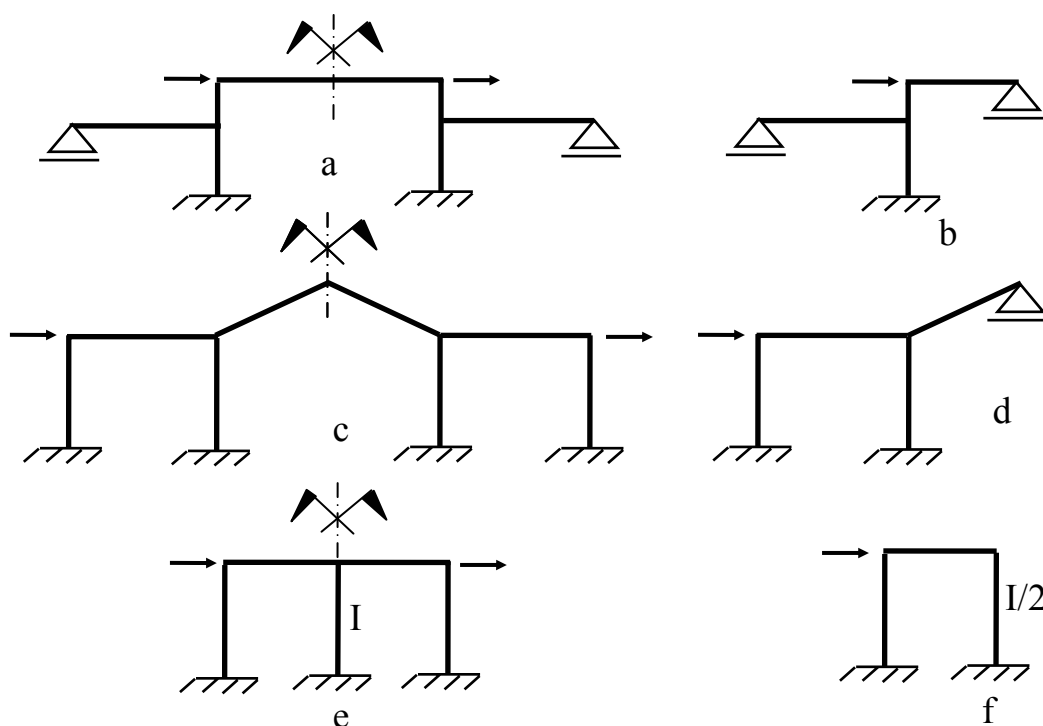


- Fig.2.9 -

Structura din figura 2.9,e are deformată simetrică, dar secțiunea de pe axa de simetrie nu se poate deplasa pe direcția axei de simetrie, deoarece aici există o bară. În consecință, în axa de simetrie se va introduce o încastrare perfectă (fig.2.9,f).

B) *Cazul încărcării antisimetrice.* Deformata structurii este antisimetrică. Ca urmare secțiunea din axa de simetrie se va deplasa pe orizontală și se va roti, dar nu se va deplasa pe verticală ($u \neq 0$, $v = 0$, $\theta \neq 0$). La structurile din figura 2.10,a și c, dintre eforturile M , N și T , primele două sunt nule, eforturi simetrice și numai forța tăietoare este diferită de zero ($M = 0$, $N = 0$, $T \neq 0$). Legătura ce se va introduce pe semistructură în această secțiune este un reazem simplu (fig.2.10,b și d), care respectă condiția cinematică ($v = 0$) și condiția statică ($T \neq 0$).

În cazul structurii din figura 2.10,e axa de simetrie întâlnește un stâlp. Din încărcarea antisimetrică stâlpul se deformează. Pentru a obține rezultatul corect la trecerea de la semistructură la structura reală trebuie ca în semistructură bara de pe axa de simetrie să fie considerată cu momentul de inerție pe jumătate (fig.2.10,f).



- Fig.2.10 -

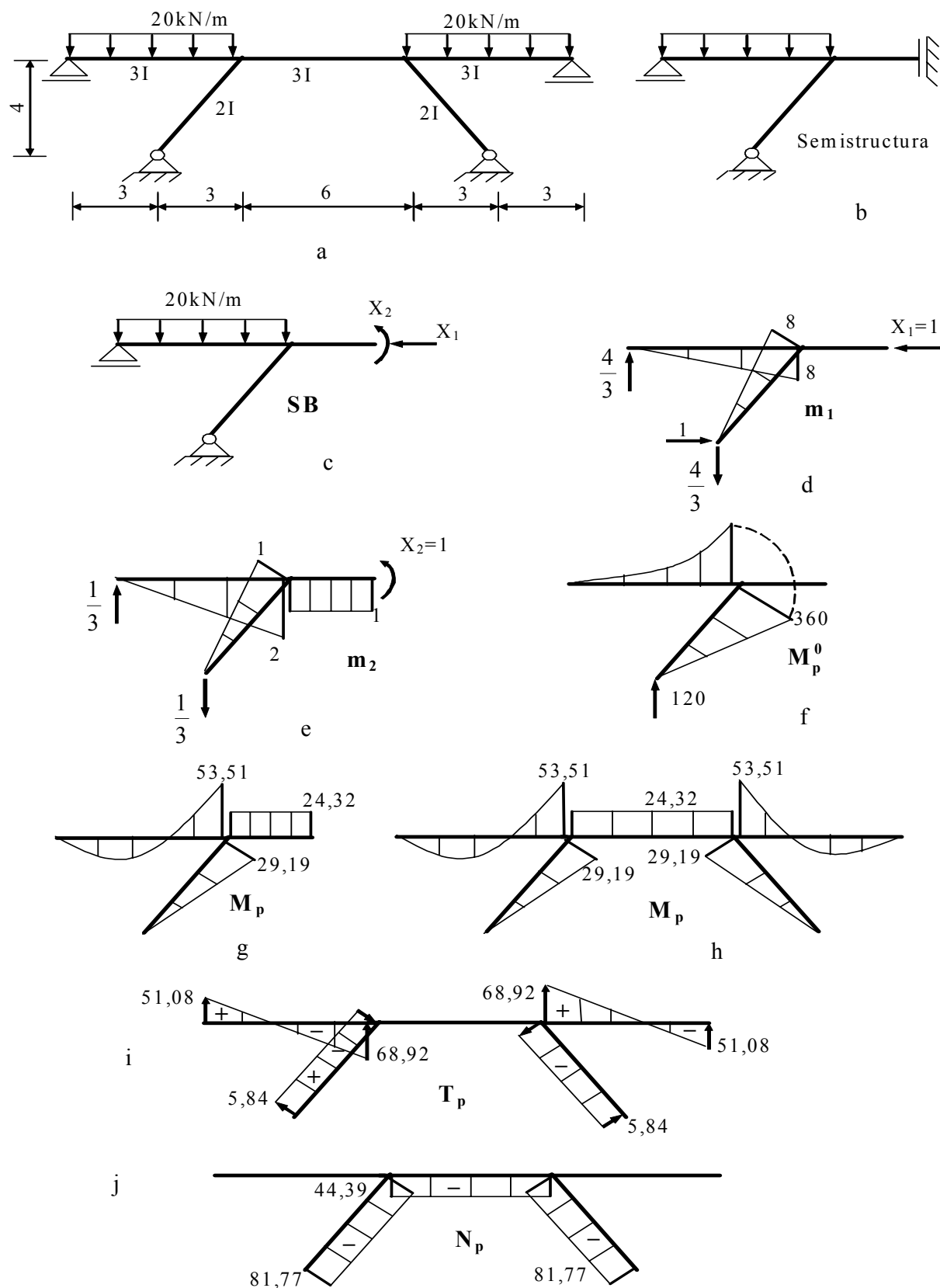
Observații:

- Calculul practic prin procedeul semistructurilor se conduce astfel: se stabilește semistructura funcție de tipul încărcării exterioare și de particularitățile structurii și apoi se urmează aceleași etape ca la structurile oarecare;

- În stabilirea gradului de nedeterminare statică, încastrarea glisantă este echivalentă cu două legături simple, la fel ca o articulație;

- La structurile cu stâlp în axa de simetrie din încărcarea antisimetrică valoarea momentelor încovoietoare obținute pe semistructură se dublează.

EXEMPLUL 2.2. Să se traseze diagramele de eforturi la structura simetrică din figura 2.11, a încărcată simetric.



- Fig.2.11 -

Structura este de trei ori static nedeterminată. Fiind încărcată simetric, semistructura se obține prin introducerea unei încastrări glisante în axa de simetrie (fig.2.11,b). Semistructura este de două ori static nedeterminată. ($N = 3 \cdot 2 - 2 - 2 \cdot 1 = 2$).

Alegând sistemul de bază reprezentat în figura 2.11,c, se trasează diagramele m_1 , m_2 și M_p^0 (fig.2.11,d, e, f).

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi:

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{96}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{52}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = \frac{9}{2EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 360 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 360 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \right) = -\frac{3840}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 360 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 360 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = -\frac{620}{EI}$$

Cu aceste valori sistemul de ecuații capătă forma

$$\begin{cases} \frac{96}{EI}X_1 + \frac{52}{3EI}X_2 - \frac{3840}{EI} = 0 \\ \frac{52}{3EI}X_1 + \frac{9}{2EI}X_2 - \frac{620}{EI} = 0 \end{cases}$$

iar valorile necunoscutele sunt:

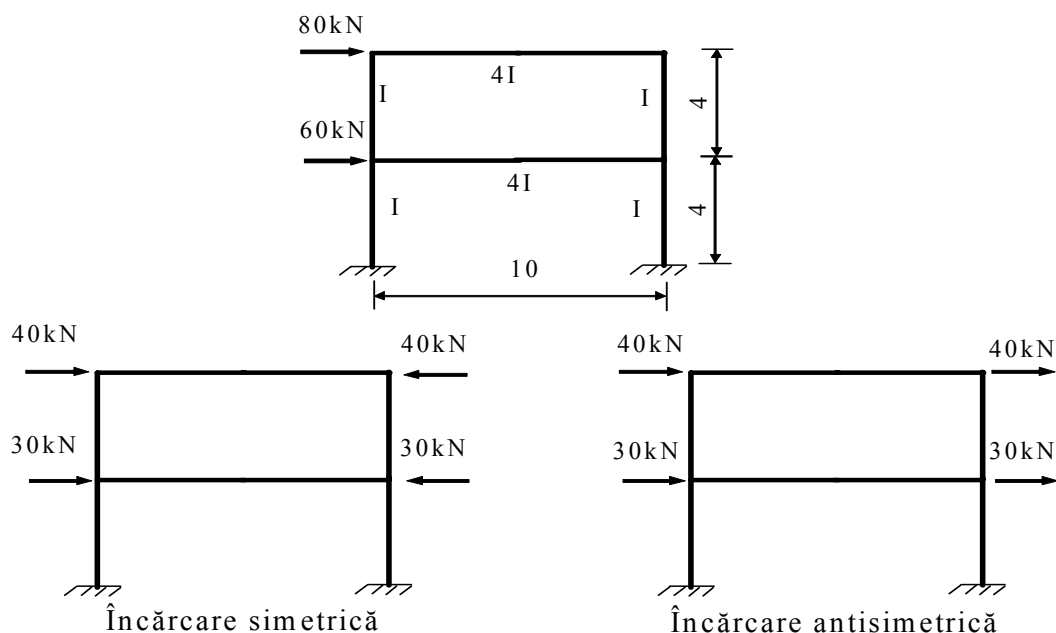
$$X_1 = 44,392; \quad X_2 = -24,324$$

Diagrama de moment încovoietor pe semistructură (fig.2.11,g) se obține prin suprapunere de efecte, respectiv

$$M_p = M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2$$

Deoarece încărcarea pe structura reală este simetrică, diagramele de moment încovoietor (fig 2.11,h) și de forță axială (fig.2.11,j) sunt simetrice, iar diagrama de forță tăietoare este antisimetrică (fig.2.11,i).

EXEMPLUL 2.3. Să se traseze diagramele de eforturi la structura simetrică din figura 2.12 utilizând procedeul semistructurilor.



- Fig.2.12 -

Încărcarea este oarecare. Aceasta se poate descompune într-o componentă simetrică și una antisimetrică (fig.2.12). Deoarece forțele sunt concentrate în noduri, componenta simetrică nu produce decât forțe axiale în rigle, în timp ce componenta antisimetrică produce atât forțe axiale, cât și forțe tăietoare și momente încovoietoare.

Pentru determinarea momentelor încovoietoare este necesar calculul structurii la componenta antisimetrică (fig.2.13,a).

Structura este de trei ori static nedeterminată

$$N = 3C - A - 2S = 3 \cdot 2 = 6$$

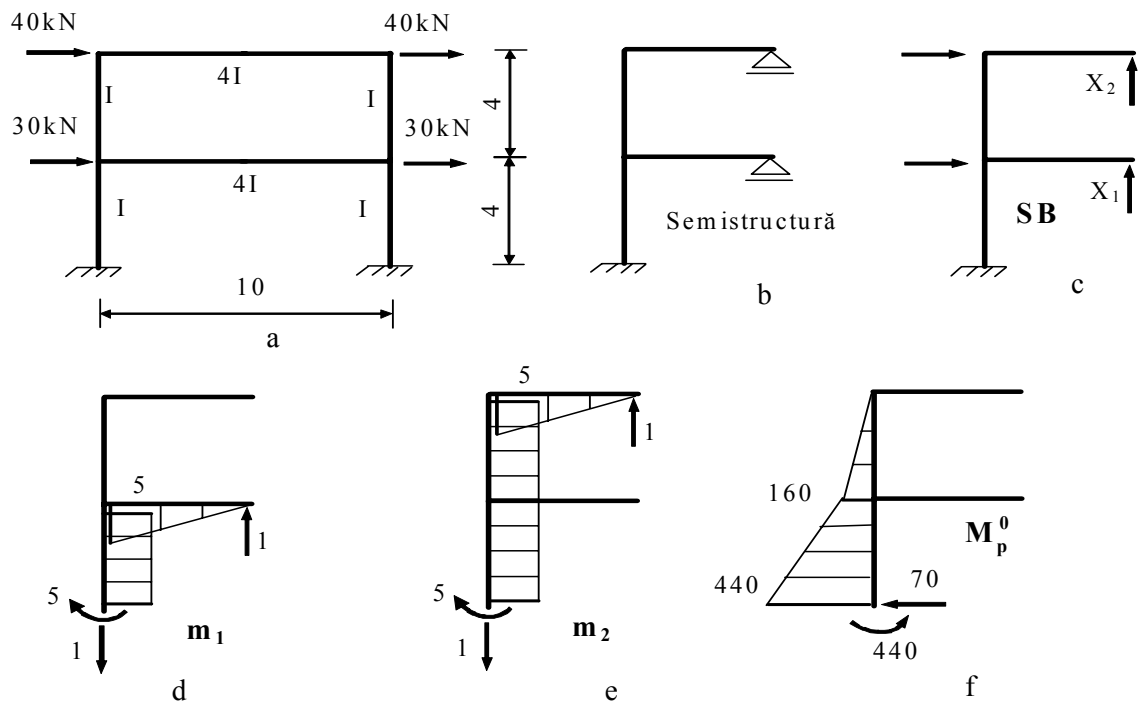
Fiind încărcată antisimetric, semistructura se obține prin introducerea de reazeme simple în axa de simetrie (fig.2.13,b). Semistructura este de două ori static nedeterminată

$$N = 3C - A - 2S = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2$$

Alegând sistemul de bază reprezentat în figura 2.13,c, se trasează diagramele m_1 , m_2 și M_p^0 (fig.2.13,d, e, f).

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$



- Fig.2.13 -

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi:

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{1325}{12EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = \frac{100}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 5 \cdot 8 \cdot 5 + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2525}{12EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 440 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 4 \cdot 5 \right) = -\frac{6000}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 440 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 4 \cdot 5 \right) = -\frac{7600}{EI}$$

Cu aceste valori sistemul de ecuații capătă forma

$$\begin{cases} \frac{1325}{12EI} X_1 + \frac{100}{EI} X_2 - \frac{6000}{EI} = 0 \\ \frac{100}{EI} X_1 + \frac{2525}{12EI} X_2 - \frac{7600}{EI} = 0 \end{cases}$$

iar valorile necunoscutelor sunt:

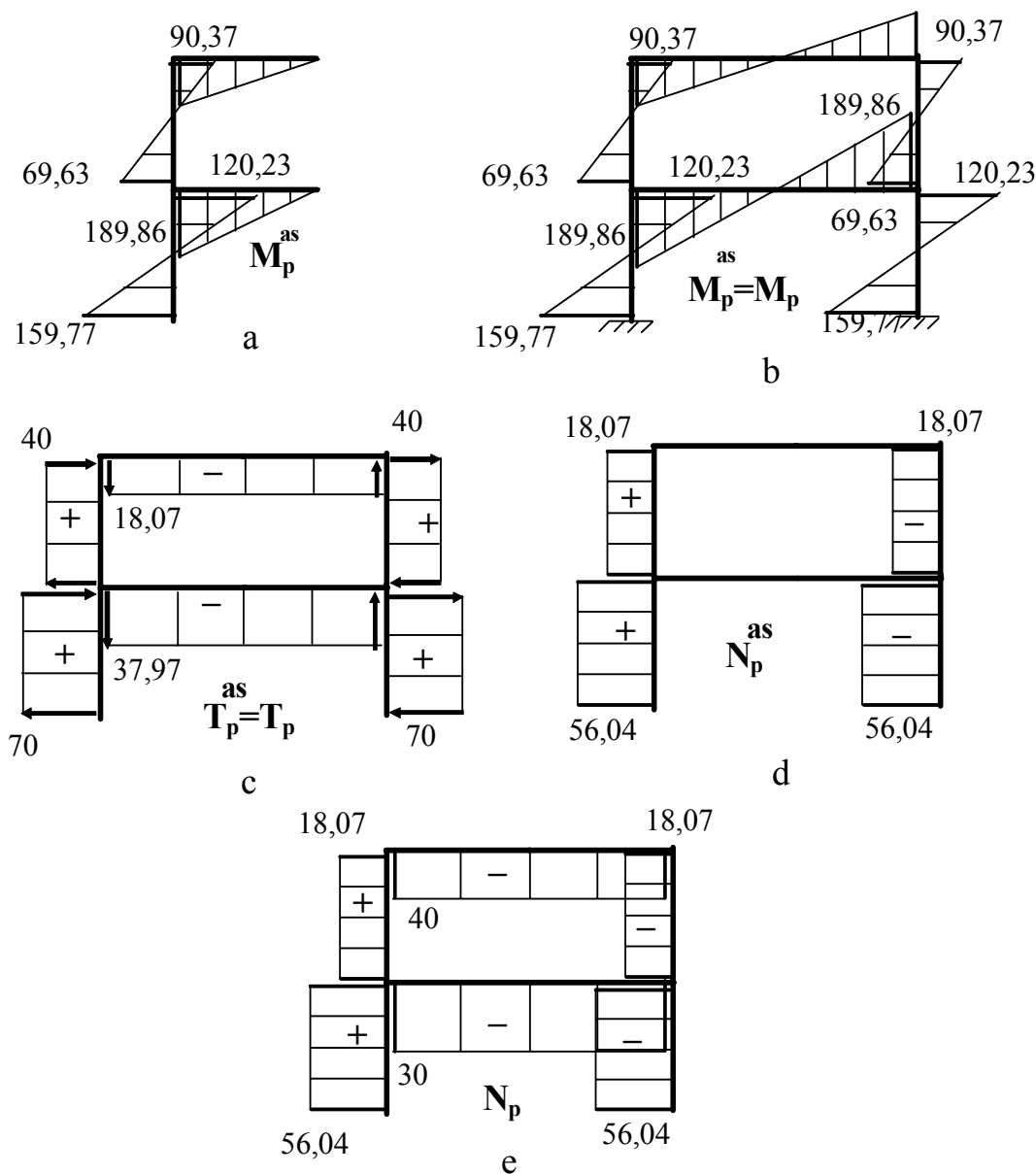
$$X_1 = 37,97; \quad X_2 = 18,07$$

Diagrama de moment încovoietor pe semistruktură (fig.2.14,a) se obține prin suprapunere de efecte, respectiv

$$M_p = M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2$$

Pentru componenta antisimetrică, diagramele de moment încovoiător (fig 2.14,b) și de forță axială (fig 2.14,d) sunt antisimetrice iar diagrama de forță tăietoare este simetrică (fig.2.14,c).

Pentru încărcarea dată, diagramele finale de moment încovoiător și de forță tăietoare sunt identice cu cele calculate pentru componeta antisimetrică, iar diagrama de forță axială se obține prin suprapunerea efectelor celor două componente ale încărcării (fig.2.14,e).



- Fig.2.14 -

Se spune că încărcarea de tipul celei prezentate în acest exemplu este o încărcare de tip antisimetric, deoarece numai componenta antisimetrică produce deformarea prin încovoiere a structurii.

2.3. Efectul variației de temperatură la structuri static nedeterminate

La proiectarea unor structuri se ține seama și de efectul variațiilor de temperatură. Acestea apar datorită diferențelor de temperatură ce există între temperatura la care se execută construcția și temperatura maximă sau minimă din zona unde urmează să se amplaseze construcția.

La structurile static nedeterminate variația de temperatură produce atât eforturi cât și modificarea configurației geometrice, ca urmare a surplusului de legături. Comparativ cu cazul încărcării cu forțe, în acest caz de încărcare eforturile depind de natura materialului și de mărimea momentelor de inerție (de produsul EI).

Sistemul ecuațiilor de condiție în cazul încărcării structurii cu variația de temperatură are forma:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2t} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nt} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Coeficienții necunoscutelor au aceleași expresii ca în cazul încărcării cu forțe, iar termenii liberi, deoarece sistemul de bază este static determinat, au expresia

$$\Delta_{it} = \alpha \int n_i t_m dx + \alpha \int m_i \frac{\Delta t}{h} dx \quad (2.15)$$

unde α reprezintă coeficientul de dilatare termică liniară ($\alpha = 1..1,1 \times 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$), t_m reprezintă temperatura medie din axa barei ($t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$), iar Δt reprezintă diferența de temperatură dintre cele două fețe ale barei ($\Delta t = t_2 - t_1$).

Deoarece t_m , Δt și h sunt constante pe fiecare bară, rezultă că $\int n_i dx$ și $\int m_i dx$ reprezintă suprafața diagramei de forță axială, respectiv de moment încovoietor pe bara respectivă.

Semnul termenilor ce intervin în calculul deplasărilor se stabilește astfel:

- dacă forța axială și temperatura medie t_m au același efect asupra barei, ambele de alungire sau scurtare, semnul este plus, în caz contrar semnul este minus;
- dacă momentul încovoietor întinde fibra mai caldă semnul este plus, iar dacă întinde fibra mai rece semnul este minus.

Rezolvând sistemul de ecuații se obțin necunoscutele $X_1, X_2, \dots, X_n$ cu care se determină momentul încovoietor în orice secțiune

$$M_t = m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + m_n X_n \quad (2.16)$$

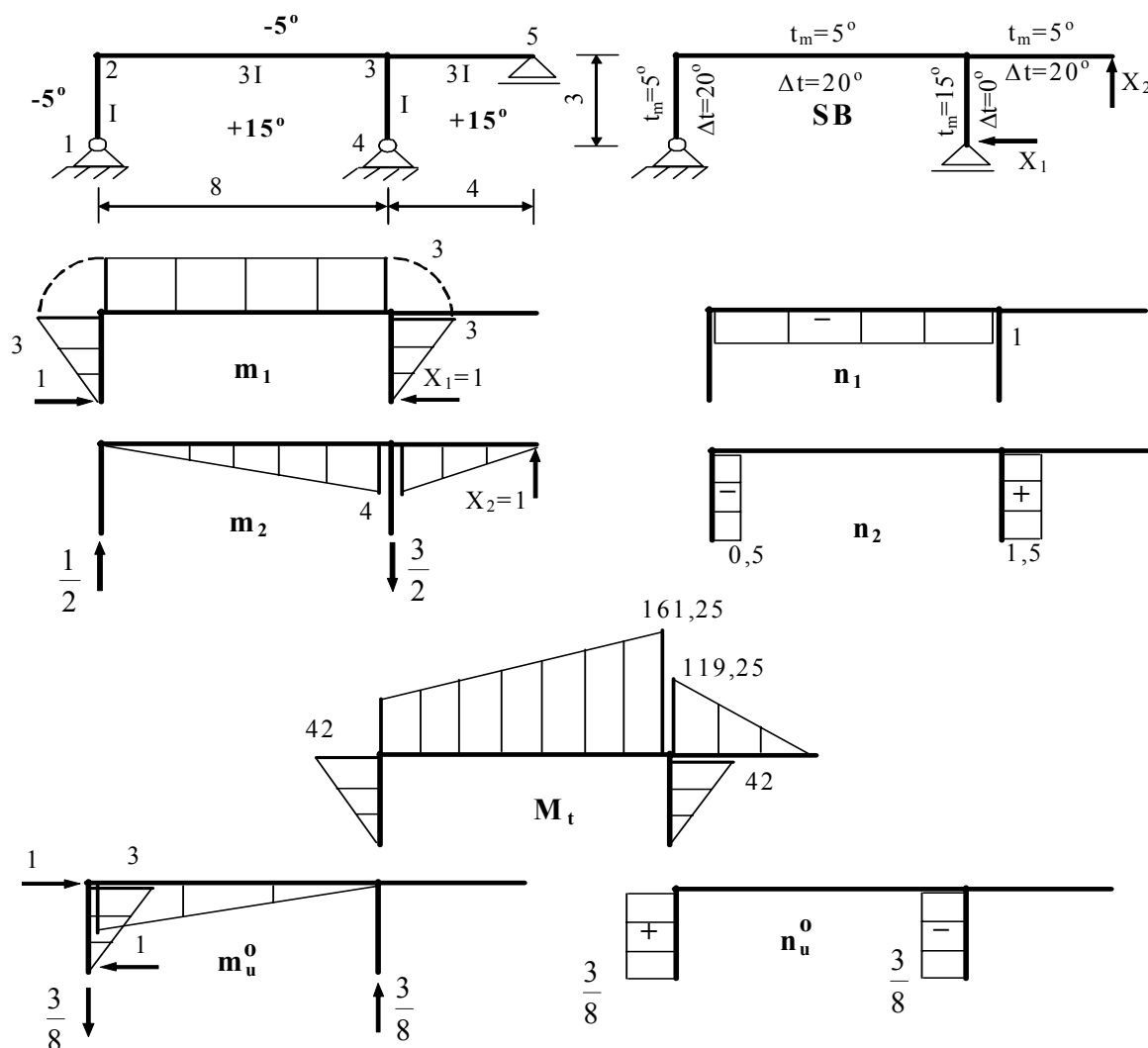
În relația (2.16) nu există un termen M_t^0 deoarece sistemul de bază este static determinat și variația de temperatură nu produce eforturi pe aceste sisteme.

Deplasarea unei secțiuni la acțiunea variației de temperatură se obține cu relația:

$$\Delta_i = \Delta_{it} + \int \frac{m_i M_t}{EI} dx = \Delta_{it} + \int \frac{m_i^0 M_t}{EI} dx \quad (2.17)$$

unde Δ_{it} are forma (2.15) și se calculează pe sistemul de bază utilizat pentru determinarea diagramei M_t , iar m_i^0 este diagrama de momente încovoietoare produsă pe același sistem de bază de forța egală cu unitatea.

EXEMPLUL 2.4. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 2.15, precum și deplasarea pe orizontală a secțiunii 2. Se consideră $EI=10^5$ kNm, $\alpha=10^{-5}$ grad $^{-1}$, iar înălțimea secțiunilor transversale ale barelor sunt: pentru rigle $h_r=60$ cm, iar pentru stâlpi $h_s=40$ cm.



- Fig.2.15 -

Structura este aceeași cu cea de la exemplul 2.1, deci, alegând același sistem de bază, coeficienții necunoscutelor au aceleași valori.

Pentru calculul termenilor liberi este necesar să se determine valorile temperaturii medii t_m și a diferenței de temperatură Δt corespunzătoare fiecărei bare a structurii.

$$\text{Bara } 1-2, 2-3 \text{ și } 3-5 \quad t_m = \frac{15-5}{2} = 5^\circ; \quad \Delta t = 15 - (-5) = 20^\circ$$

$$\text{Bara } 3-4 \quad t_m = \frac{15-15}{2} = 15^\circ; \quad \Delta t = 15 - 15 = 0^\circ$$

În figura 2.15 sunt trasate diagramele unitare de forță axială n_1 și n_2 precum și diagramele unitare de moment încovoietor m_1 și m_2 produse de necunoscutele $X_1=1$ și $X_2=1$ acționând succesiv pe sistemul de bază.

Termenii liberi au următoarea formă:

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= \alpha \int n_1 t_m dx + \alpha \int m_1 \frac{\Delta t}{h} dx = \alpha \cdot (-1 \cdot 8 \cdot 5) + \\ &+ \alpha \cdot \left(-\frac{20}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{20}{0,6} \cdot 8 \cdot 3 \right) = -1065\alpha = -1065 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2t} &= \alpha \int n_2 t_m dx + \alpha \int m_2 \frac{\Delta t}{h} dx = \alpha \cdot (-3 \cdot 0,5 \cdot 5 + 3 \cdot 1,5 \cdot 15) + \\ &+ \alpha \cdot \left(\frac{20}{0,6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 + \frac{20}{0,6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \right) = 860\alpha = 860 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Se constată că termenii liberi nu depind de produsul EI. Cu aceste elemente sistemul ecuațiilor de condiție devine:

$$\begin{cases} \frac{42}{EI} X_1 - \frac{16}{EI} X_2 - 1065 \cdot 10^{-5} = 0 \\ -\frac{16}{EI} X_1 + \frac{64}{3EI} X_2 + 860 \cdot 10^{-5} = 0 \end{cases}$$

Întrucât termenii liberi nu depind de produsul EI și ținând cont de valoarea acestuia se obține:

$$\begin{cases} 42X_1 - 16X_2 - 1065 = 0 \\ -16X_1 + \frac{64}{3}X_2 + 860 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile: $X_1 = 14$ și $X_2 = -29,813$

Cu aceste valori au fost calculate momentele încovoietoare din diagrama M_t (fig.2.15) utilizând relația:

$$M_t = m_1 X_1 + m_2 X_2$$

Se constată, din diagrama M_t , că **la acțiunea variației de temperatură fibra întinsă este fibra mai rece**. Acesta reprezintă paradoxul acțiunii variației de temperatură asupra structurilor static nedeterminate.

Pentru calculul deplasării pe orizontală a secțiunii 2 la acțiunea variației de temperatură se utilizează relația (2.17), astfel:

$$\begin{aligned} u_2 &= \alpha \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot 3 \cdot 5 - \frac{3}{8} \cdot 3 \cdot 15 \right) + \alpha \cdot \left(\frac{20}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{20}{0,6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 161,25 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = \\ &= -613,75\alpha - \frac{453}{EI} = -1066,75 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 11 \text{ mm} \end{aligned}$$

2.4. Efectul cedărilor de reazeme la structuri static nedeterminate

Prin cedări de reazeme se înțeleg tasările și/sau rotirile fundațiilor, ca urmare a deformării terenului de fundație și inexactitățile de execuție a elementelor prefabricate care trebuie conectate la montaj.

La structurile static nedeterminate, cedările de reazeme produc atât eforturi cât și modificarea configurației geometrice, ca urmare a surplusului de legături. Excepție face cadrul dublu articulată cu reazemele la același nivel supus unei singure cedări de reazem pe verticală, la care nu apar eforturi deoarece articulația rămasă fixă permite rotirea liberă (deplasările fiind foarte mici în comparație cu dimensiunile structurii).

Comparativ cu cazul încărcării cu forțe, și în acest caz de încărcare eforturile depind de natura materialului și de mărimea momentelor de inerție (de produsul EI).

Sistemul ecuațiilor de condiție în cazul încărcării structurii cu cedări de reazeme are forma:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1\Delta} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2\Delta} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{n\Delta} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Coeficienții necunoscutelor au aceleași expresii ca în cazul încărcării cu forțe, iar termenii liberi au expresia

$$\Delta_{i\Delta} = -\sum r_{ki} \cdot \Delta_k \quad (2.19)$$

unde r_{ki} sunt reacțiunile care apar în reazemele k prin încărcarea sistemului de bază cu forța $X_i=1$, iar Δ_k sunt cedările de reazeme.

Rezolvând sistemul de ecuații se obțin necunoscutele $X_1, X_2, \dots, X_n$ cu care se determină momentul încovoietor în orice secțiune

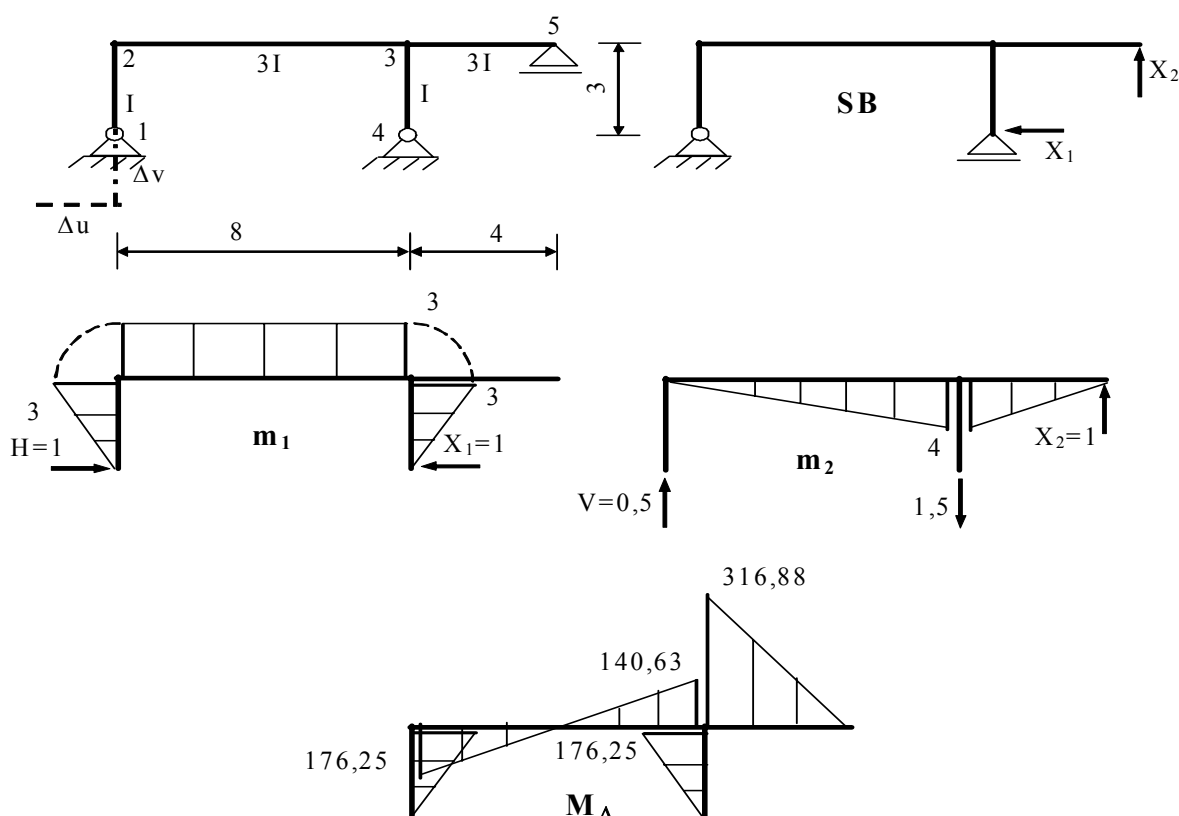
$$M_{\Delta} = m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + m_n X_n \quad (2.20)$$

În relația (2.20) nu există un termen M_{Δ}^0 deoarece sistemul de bază este static determinat și cedările de reazeme nu produc eforturi pe aceste sisteme.

Deplasarea unei secțiuni la acțiunea cedărilor de reazeme se obține cu relația:

$$\Delta_i = \Delta_{i\Delta} + \int \frac{m_i M_t}{EI} dx = - \sum r_{ki} \cdot \Delta_k + \int \frac{m_i^0 M_{\Delta}}{EI} dx \quad (2.21)$$

EXEMPLUL 2.5. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 2.16 supusă acțiunii cedărilor de reazeme. Se consideră $EI=10^5$ kNm, $\Delta u=1,2$ cm, $\Delta v=1,5$ cm.



- Fig.2.16 -

Structura este aceeași cu cea de la exemplul 2.1, deci, alegând același sistem de bază, coeficienții necunoscutelor au aceleași valori.

Termenii liberi se determină utilizând relația (2.19) și au următoarea formă:

$$\Delta_{1\Delta} = -(-H \cdot \Delta u) = 1 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} = 1,2 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta_{2\Delta} = -(-V \cdot \Delta v) = 0,5 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} = 0,75 \cdot 10^{-2}$$

Se constată că termenii liberi nu depind de produsul EI. Cu aceste elemente sistemul ecuațiilor de condiție devine:

$$\begin{cases} \frac{42}{EI} X_1 - \frac{16}{EI} X_2 + 1,2 \cdot 10^{-2} = 0 \\ -\frac{16}{EI} X_1 + \frac{64}{3EI} X_2 + 0,75 \cdot 10^{-2} = 0 \end{cases}$$

Înmulțind ecuațiile cu produsul EI și ținând cont de valoarea acestuia se obține:

$$\begin{cases} 42X_1 - 16X_2 + 1200 = 0 \\ -16X_1 + \frac{64}{3}X_2 + 750 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile: $X_1 = -58,75$ și $X_2 = -79,22$

Cu aceste valori au fost calculate momentele încovoietoare din diagrama M_{Δ} (fig.2.16) utilizând relația:

$$M_{\Delta} = m_1 X_1 + m_2 X_2$$

Pentru verificarea corectitudinii calculelor se utilizează condiția de compatibilitate, respectiv deplasarea pe direcția unei legături fixe să fie egală cu zero.

Astfel deplasarea pe direcția reazemului 5 (v_5) se calculează utilizând relația (2.21) astfel:

$$v_5 = -\sum r_{k2} \cdot \Delta_k + \int \frac{m_2^0 M_{\Delta}}{EI} dx$$

unde primul termen este tocmai $\Delta_{2\Delta}$, respectiv $\Delta_{2\Delta} = 0,75 \cdot 10^{-2} m$, iar al doilea termen are valoarea

$$\begin{aligned} \int \frac{m_2^0 M_{\Delta}}{EI} dx &= \frac{1}{3EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 176,25 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 140,63 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 316,88 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = -\frac{750,03}{EI} = -0,75 \cdot 10^{-2} m \end{aligned}$$

Rezultă $v_5 \approx 0$, deci diagrama M_{Δ} este corectă.

CAPITOLUL III

APLICAREA METODEI EFORTURILOR LA REZOLVAREA UNOR TIPURI PARTICULARE DE STRUCTURI

În prezentul capitol se studiază modul de calcul, prin metoda eforturilor, al următoarelor tipuri de structuri:

- grinzi continue;
- grinzi cu zăbrele;
- arce.

Tratarea distinctă a acestor categorii de structuri, în vederea unor forme sistematizate de rezolvare este justificată de larga lor folosire în practică.

3.1. Grinzi continue

Grinzile continue sunt sisteme static nedeterminate frecvent utilizate în construcții civile, industriale, poduri. Aceste sisteme de bare drepte au întotdeauna un reazem fix (articulație sau încastrare) și unul sau mai multe reazeme simple. Ele se pot realiza cu mai multe deschideri sau numai cu o singură deschidere, cu console sau fără console (fig.3.1).

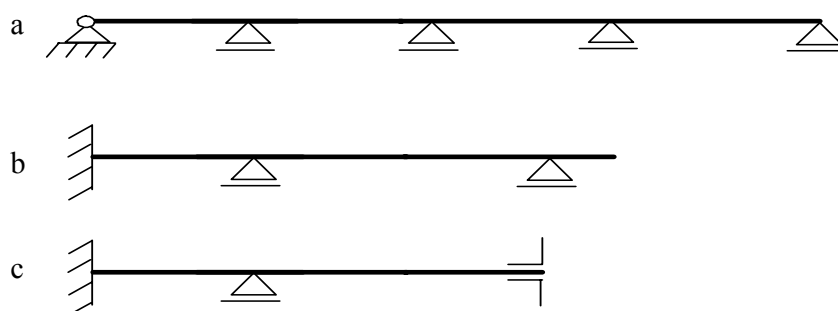


Fig.3.1

Gradul de nedeterminare statică la grinzile continue se poate stabili utilizând relațiile (2.1), (2.2) sau direct astfel:

- dacă grinda continuă are ca reazem fix o articulație și n reazeme simple, atunci gradul de nedeterminare statică este $n-1$, adică este egal cu numărul reazemelor simple intermediare,

- dacă grinda continuă are ca reazem fix o încastrare și n reazeme simple, atunci gradul de nedeterminare statică este n , deci numărul reazemelor simple.

De exemplu grinda din figura 3.1,a este de 3 ori static nedeterminată, grinda din figura 3.1,b este de 2 ori static nedeterminată, iar grinda din figura 3.1,c este de 3 ori static nedeterminată.

Rezolvarea grinzilor continue prin metoda eforturilor trebuie să aibă la bază ideea generală de reducere a volumului de calcule. Aceasta se poate realiza printr-o alegere judicioasă a sistemului de bază.

Fie grinda din figura 3.2,a de trei ori static nedeterminată.

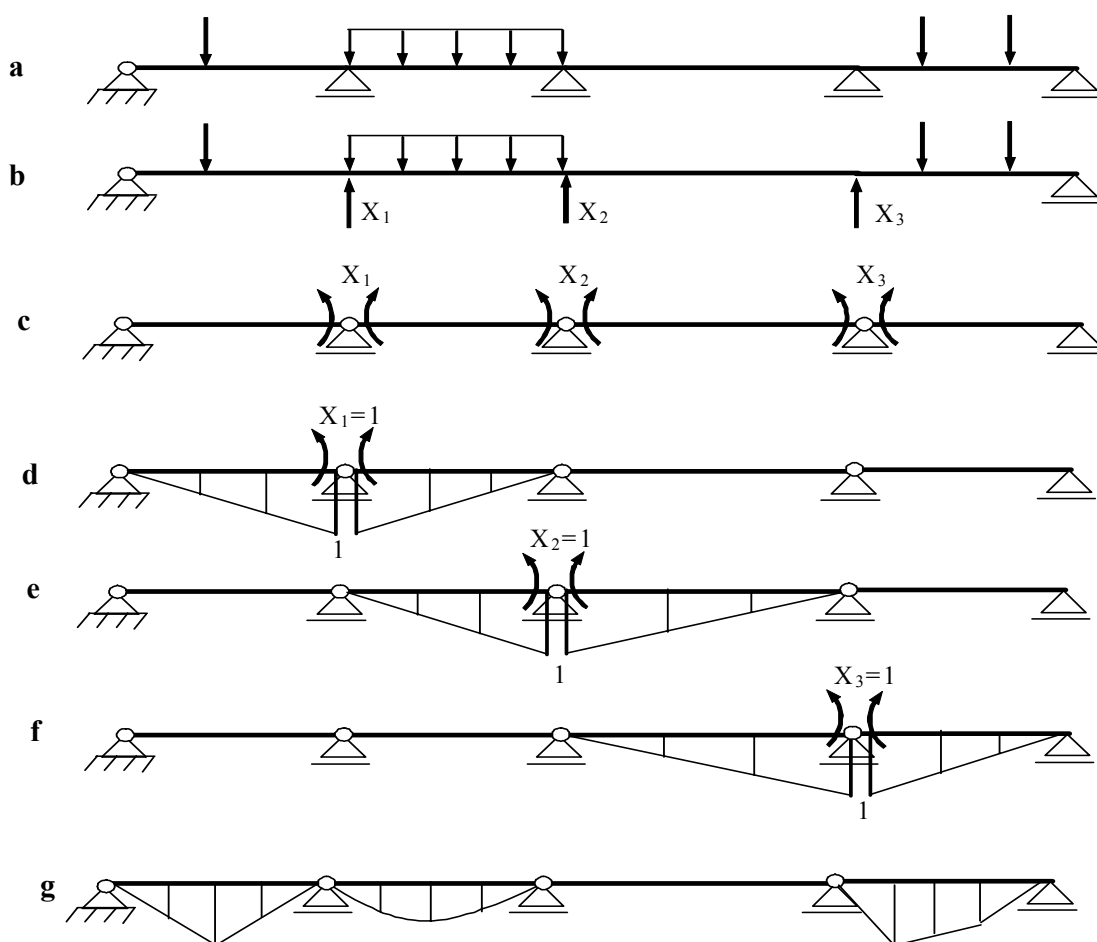


Fig.3.2

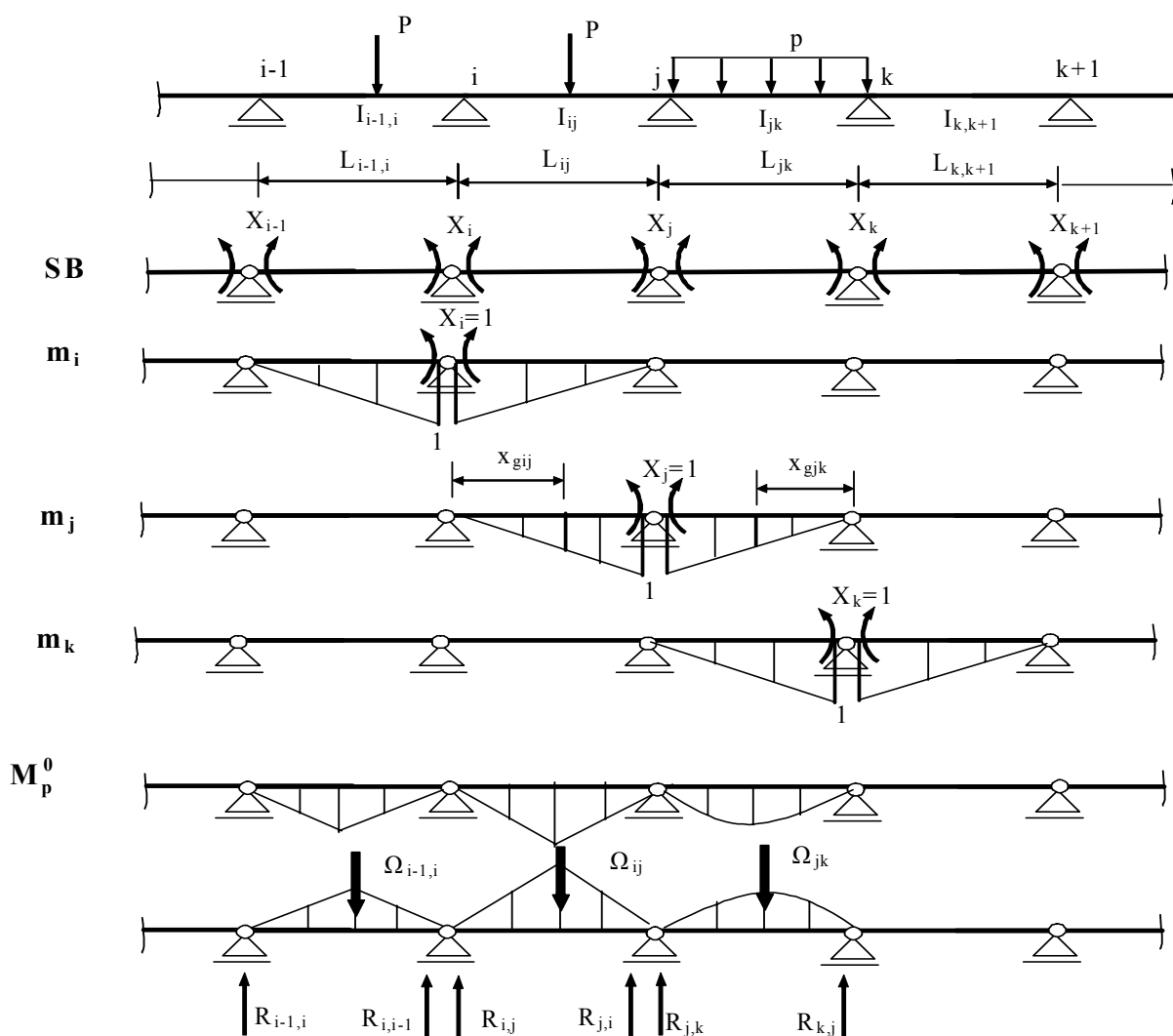
Dacă se alege sistemul de bază din figura 3.2,b se poate observa că atât diagramele unitare cât și diagrama M_p^0 se întind pe întreaga lungime a grinzii, ceea ce conduce la un volum mare de operații. Dacă se alege sistemul de bază din figura 3.2,c obținut prin întreruperea continuității grinzii în dreptul reazemelor intermediare, se observă că acesta este format dintr-o succesiune de grinzi simplu rezemate. Se remarcă faptul că din încărcarea sistemului de bază cu necunoscutele - perechi de momente unitare - diagramele unitare se extind numai pe deschiderile adiacente reazemului (fig.3.2,d,e,f), iar din încărcarea cu forțele exterioare, diagrama M_p^0 se realizează foarte ușor (fig.3.2,g).

Acest mod de alegere a sistemului de bază va permite realizarea sistematizării calculului grinzilor continue.

3.1.1. Ecuația celor trei momente

Sistematizarea calculului grinzilor continue se poate face sub forma ecuațiilor celor trei momente. Acest procedeu de calcul a fost elaborat de Clapeyron.

Fie o grindă continuă din care se consideră numai o parte (fig. 3.3).



- Fig.3.3 -

Tot în figura 3.3 sunt prezentate sistemul de bază ales pe baza elementelor prezentate anterior, precum și diagramele unitare și diagrama M_p^0 . Pentru acest sistem de bază ales, ecuația de compatibilitate reprezintă condiția ca rotirea relativă între două grinzi simplu rezemate adiacente, ale sistemului de bază să fie egală cu zero, deoarece grinda reală este continuă.

Pentru nodul j , ecuația de compatibilitate, care în acest caz este reflectată prin condiția de continuitate a formei deformate are forma

$$\theta_j^{\text{rel}} = 0 \quad (3.1)$$

sau dezvoltat

$$\delta_{ji} X_i + \dots + \delta_{jj} X_j + \delta_{jk} X_k + \dots + \delta_{jn} X_n + \Delta_{jp} = 0 \quad (3.2)$$

Deoarece diagramele unitare se întind numai pe două deschideri adiacente, dintre toți coeficienții necunoscutelor din ecuația (3.2) numai δ_{ij} , δ_{jj} și δ_{jk} sunt diferiți de zero. În această situație ecuația (3.2) devine

$$\delta_{ji} X_i + \delta_{jj} X_j + \delta_{jk} X_k + \Delta_{jp} = 0 \quad (3.3)$$

Această formă redusă a ecuației (3.2) se numește **ecuația celor trei momente**, deoarece necunoscutele care intervin sunt momentele încovoietoare din trei secțiuni succesive. Efectuând calculul coeficienților necunoscutelor se obțin expresiile

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \frac{1}{EI_{ij}} \cdot \frac{1}{2} \cdot L_{ij} \cdot \frac{1}{3} = \frac{L_{ij}}{6EI_{ij}} \\ \delta_{jj} &= \frac{1}{EI_{ij}} \cdot \frac{1}{2} \cdot L_{ij} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{jk}} \cdot \frac{1}{2} \cdot L_{jk} \cdot \frac{2}{3} = \frac{L_{ij}}{3EI_{ij}} + \frac{L_{jk}}{3EI_{jk}} \\ \delta_{jk} &= \frac{1}{EI_{jk}} \cdot \frac{1}{2} \cdot L_{jk} \cdot \frac{1}{3} = \frac{L_{jk}}{6EI_{jk}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Introducând expresiile obținute pentru coeficienții necunoscutelor în ecuația (3.3) și multiplicând totodată cu $6EI_0$ unde I_0 reprezintă un moment de inerție de comparație, rezultă

$$L_{ij} \frac{I_0}{I_{ij}} \cdot X_i + 2 \left(L_{ij} \cdot \frac{I_0}{I_{ij}} + L_{jk} \cdot \frac{I_0}{I_{jk}} \right) \cdot X_j + L_{jk} \frac{I_0}{I_{jk}} \cdot X_k + 6EI_0 \Delta_{jp} = 0 \quad (3.5)$$

Utilizând următoarele notații

$$\lambda_{ij} = L_{ij} \cdot \frac{I_0}{I_{ij}} \text{ și } \lambda_{jk} = L_{jk} \cdot \frac{I_0}{I_{jk}} \quad (3.6)$$

unde λ_{ij} și λ_{jk} reprezintă **lungimile transformate** ale deschiderilor ij respectiv jk , ecuația (3.5) devine

$$\lambda_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_K + 6EI_0\Delta_{jp} = 0 \quad (3.7)$$

De remarcat faptul că prima parte a ecuației (3.7) depinde numai de caracteristicile geometrice ale grinzii.

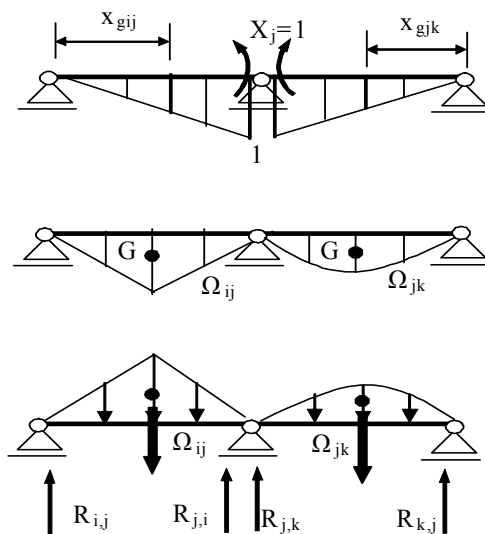
Termenul liber al ecuației (3.8) se poate scrie sub forma

$$6EI_0\Delta_{jp} = 6\Omega_{ij} \cdot m_{g_{ij}} \cdot \frac{I_0}{I_{ij}} + 6\Omega_{jk} \cdot m_{g_{jk}} \cdot \frac{I_0}{I_{jk}} \quad (3.8)$$

unde Ω_{ji} și Ω_{jk} reprezintă suprafața diagramei M_p^0 pe deschiderea ij respectiv jk , iar $m_{g_{ij}}$ și $m_{g_{jk}}$ ordonata din diagrama unitară m_j pe deschiderea ij respectiv jk .

Ordonatele $m_{g_{ij}}$ și $m_{g_{jk}}$ se pot exprima astfel (fig. 3.4)

$$m_{g_{ij}} = \frac{X_{g_{ij}}}{L_{ij}} \text{ și } m_{g_{jk}} = \frac{X_{g_{jk}}}{L_{jk}} \quad (3.9)$$



- Fig. 3.4-

Introducând (3.9) în (3.8) se obține

$$6EI_0\Delta_{jp} = 6\Omega_{ij} \cdot \frac{X_{g_{ij}}}{L_{ij}} \cdot \frac{I_0}{I_{ij}} + 6\Omega_{jk} \cdot \frac{X_{g_{jk}}}{L_{jk}} \cdot \frac{I_0}{I_{jk}} = 6R_{ji} \frac{I_0}{I_{ij}} + 6R_{jk} \frac{I_0}{I_{jk}} \quad (3.10)$$

unde R_{ji} și R_{jk} reprezintă reacțiunea în reazemul j când grinda ij este încărcată cu forța concentrată Ω_{ji} care reprezintă rezultanta diagramei M_p^0 răsturnată, respectiv reacțiunea în reazemul j când grinda jk este încărcată cu forța concentrată Ω_{jk} care reprezintă rezultanta diagramei M_p^0 răsturnată. Reacțiunile R_{ji} și R_{jk} sunt reacțiuni fictive.

Cu aceste elemente se poate scrie expresia finală a ecuației celor trei momente:

$$\lambda_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_k + 6R_{ji}\frac{I_0}{I_{ij}} + 6R_{jk}\frac{I_0}{I_{jk}} = 0 \quad (3.11)$$

Scriind câte o astfel de ecuație pentru fiecare secțiune unde s-a întrerupt continuitatea ($j=1,2,...,n$) se obține sistemul de ecuații, din rezolvarea căruia rezultă necunoscutele $X_1, X_2, ..., X_n$, respectiv momentele încovoietoare din secțiunile de pe reazeme.

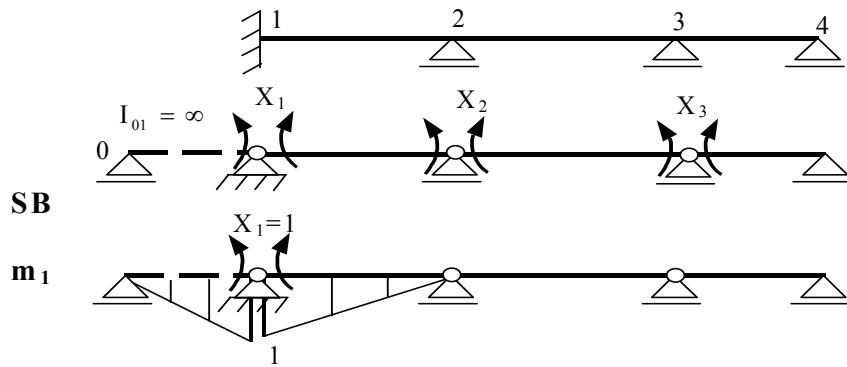
Momentul încovoietor într-o secțiune curentă a unei deschideri se calculează prin suprapunerea efectelor

$$M_p = M_p^0 + m_1X_1 + m_2X_2 + ... + m_nX_n \quad (3.12)$$

Pentru calculul forței tăietoare se detașează fiecare deschidere prin secționarea în imediata vecinătate a reazemelor și din condiția de echilibru static se determină forțele tăietoare de la capete.

Referitor la modul de aplicare practică a ecuației celor trei momente la rezolvarea grinzilor continue sunt necesare următoarele observații:

- nu mai este necesară trasarea diagramelor unitare;
- în sistemul de ecuații, prima și ultima ecuație conțin numai câte două necunoscute;
- reacțiunile fictive R_{ji} și R_{jk} , care reprezintă reacțiunile în reazemul j obținute pe grinzile conjugate ij și jk încărcate cu diagrama M_p^0 răsturnată, se introduc în ecuația (3.11) cu semnul plus dacă au sensul de jos în sus și cu semnul minus dacă au sensul de sus în jos;
- în cazul grinzilor continue încărcate cu forțe verticale gravitaționale pe toate deschiderile, necunoscutele (momentele de pe reazeme) rezultă negative, adică fibra superioară este cea întinsă;
- în cazul grinzilor continue care au un capăt încastrat (fig 3.5), sistemul de bază se alege prin introducerea unei deschideri fictive adiacente secțiunii de încastrare pentru care se impune condiția ca lungimea sa transformată să fie egală cu zero. Această condiție se realizează considerând că deschiderea are momentul de inerție egal cu infinit.

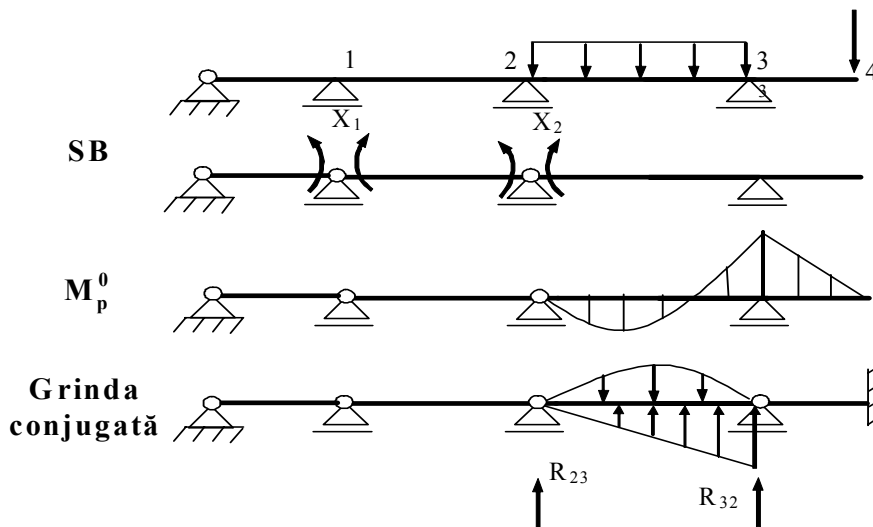


- Fig. 3.5-

Astfel ecuația de condiție pentru secțiunea din încastrare are forma

$$2\lambda_{12}X_1 + \lambda_{12}X_2 + 6R_{12} \frac{I_0}{I_{12}} = 0 \quad (3.13)$$

- la grinzile continue cu consolă (fig. 3.6) în sistemul de bază apare o grindă cu consolă, grinda 2-3-4.



- Fig.3.6-

Efectul încărcării de pe consolă intervine în calcul prin reacțiunea fictivă R_{23} din ultimul reazem intermediar, obținută prin considerarea diagramei de moment încovoietor din deschiderea 2-3.

Pentru ușurința calculului reacțiunii fictive se poate utiliza suprapunerea de efecte, respectiv efectul încărcării de pe deschiderea adiacentă consolei și

efectul încărcării de pe consolă. De remarcat faptul că diagrama M_p^0 de pe consolă nu intervine în calculul reacțiunilor, deoarece conjugata grinzii cu consolă este o grindă Gerber, cu deschiderea 2-3 grindă secundară și consola grindă principală.

În calculul practic al grinzilor continue, utilizând ecuația celor trei momente, se parcurg următoarele etape:

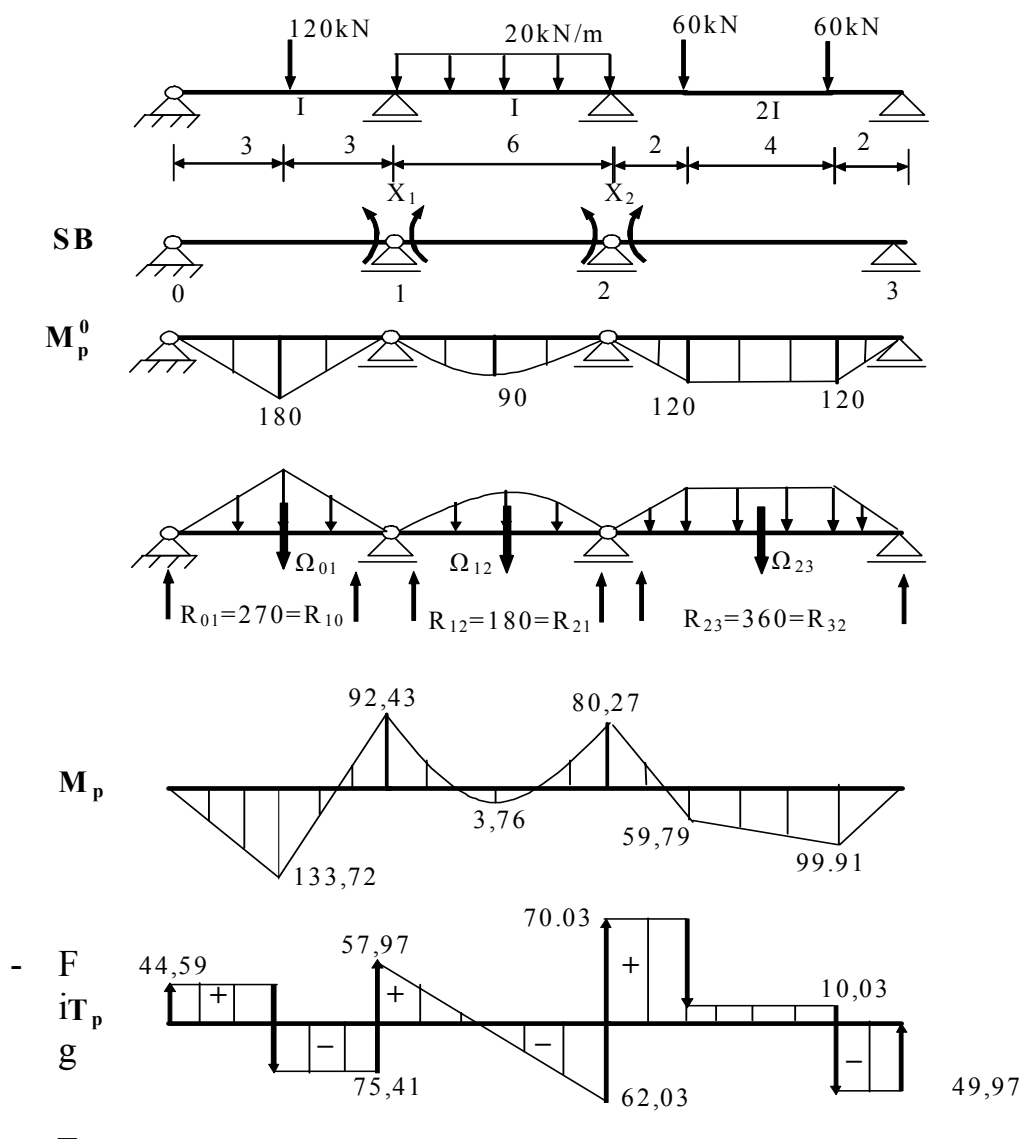
- se stabilește gradul de nedeterminare statică;
- se alege sistemul de bază prin întreruperea continuității barei în dreptul reazemelor intermediare și transformarea încastrării, dacă există, în articulație cu introducerea unei deschideri fictive având momentul de inerție infinit;
- se trasează diagama de moment încovoietor pe sistemul de bază produsă de încărcarea cu forțe exterioare;
- se calculează lungimile transformate ale deschiderilor, ținând cont de momentul de inerție de comparație I_0 ;
- se determină suprafața diagramei de moment încovoietor de pe fiecare deschidere (cu excepția consolei) și se calculează reacțiunile fictive de pe grinda conjugată;
- se scrie sistemul ecuațiilor de condiție care cuprinde un număr de ecuații de forma (3.11) egal cu gradul de nedeterminare statică;
- se rezolvă sistemul de ecuații și se trasează diagama de moment încovoietor prin suprapunere de efecte utilizând relația (3.12);
- se determină forțele tăietoare utilizând același procedeu ca la structurile în formă de cadre.

EXEMPLUL 3.1 Să se traseze diagramele de eforturi la grinda continuă din figura 3.7.

Grinda continuă este de două ori static nedeterminată. Sistemul de bază s-a ales prin întreruperea continuității grinzii în secțiunile din dreptul reazemelor intermediare, obținând o succesiune de grinzi simplu rezemate (0 – 1, 1 – 2 și 2 – 3).

Ecuațiile de condiție, care reprezintă ecuații de continuitate a deformatelor în secțiunile 1 și 2 sunt:

$$\begin{cases} \lambda_{01}X_0 + 2(\lambda_{01} + \lambda_{12})X_1 + \lambda_{12}X_2 + 6R_{10} \cdot \frac{I_0}{I_{01}} + 6R_{12} \cdot \frac{I_0}{I_{12}} = 0 \\ \lambda_{12}X_1 + 2(\lambda_{12} + \lambda_{23})X_2 + \lambda_{23}X_3 + 6R_{21} \cdot \frac{I_0}{I_{12}} + 6R_{23} \cdot \frac{I_0}{I_{23}} = 0 \end{cases}$$



- Fig.3.7 -

Alegând $I_0=I$ se obțin următoarele valori ale lungimilor transformate

$$\lambda_{01} = 6 \frac{I}{I} = 6\text{m}; \lambda_{12} = 6 \frac{I}{I} = 6\text{m} \text{ și } \lambda_{23} = 8 \frac{I}{2I} = 4\text{m}$$

Suprafețele diagramelor de moment încovoietor și reacțiunile fictive de pe fiecare deschidere sunt

$$\Omega_{01} = \frac{1}{2} 6 \cdot 180 = 540; \quad R_{01} = R_{10} = \frac{1}{2} \Omega_{01} = 270$$

$$\Omega_{12} = \frac{2}{3} 6 \cdot 90 = 360; \quad R_{12} = R_{21} = \frac{1}{2} \Omega_{12} = 180$$

$$\Omega_{23} = \frac{1}{2} \cdot (8 + 4) \cdot 120 = 720; \quad R_{23} = R_{32} = \frac{1}{2} \Omega_{23} = 360$$

Se poate observa că, deoarece încărcarea este simetrică pe fiecare deschidere, reacțiunile fictive au rezultat egale, pe fiecare deschidere.

Tinând cont și de faptul că $X_0=0$ și $X_3=0$ rezultă un sistem de două ecuații cu două necunoscute

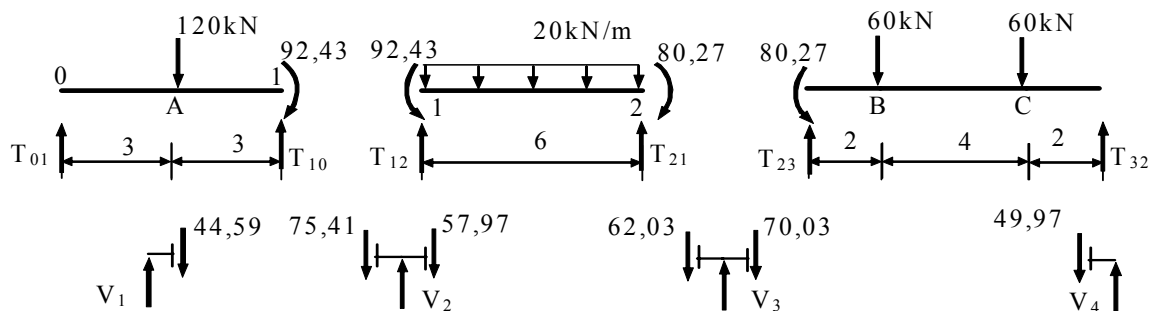
$$\begin{cases} 2(6+6)X_1 + 6X_2 + 6 \cdot 270 \cdot \frac{I}{I} + 6 \cdot 180 \cdot \frac{I}{I} = 0 \\ 6X_1 + 2(6+4)X_2 + 6 \cdot 180 \cdot \frac{I}{I} + 6 \cdot 360 \cdot \frac{I}{2I} = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 24X_1 + 6X_2 + 2700 = 0 \\ 6X_1 + 20X_2 + 2160 = 0 \end{cases}$$

Necunoscutele au următoarele valori: $X_1 = -92,43$ și $X_2 = -80,27$. Semnul minus pentru necunoscute indică faptul că în secțiunile din dreptul reazemelor intermediare 1 și 2 fibra întinsă este cea superioară. Diagrama de moment încovoietor a fost trasată în figura 3.7.

Pentru calculul forțelor tăietoare precum și al momentelor maxime din câmp se detașează fiecare deschidere și se încarcă cu forța exterioară ce îi revine și cu eforturile de la capete, unde momentele sunt luate din diagrama M_p (fig.3.8).



- Fig.3.8 -

Deschiderea 0 - 1

$$\begin{cases} \sum M_0 = 0; & 120 \cdot 3 + 92,43 - T_{10} \cdot 6 = 0; & T_{10} = 75,41 \\ \sum M_1 = 0; & T_{01} \cdot 6 - 120 \cdot 3 + 92,43 = 0; & T_{01} = 44,59 \end{cases}$$

$$M_A = 44,59 \cdot 3 = 133,77$$

Deschiderea 1 - 2

$$\begin{cases} \sum M_1 = 0; & -92,43 + 20 \cdot 6 \cdot 3 + 80,27 - T_{21} \cdot 6 = 0; & T_{21} = 57,97 \\ \sum M_2 = 0; & -92,43 + T_{12} \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3 + 80,27 = 0; & T_{12} = 62,03 \end{cases}$$

Într-o secțiune oarecare expresiile forței tăietoare și a momentului încovoietor sunt

$$T_x = 62,03 - 20 \cdot x$$

$$M_x = -92,43 + 62,03 \cdot x - 20 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Secțiunea din câmp în care momentul încovoietor este maxim, se determină din condiția ca forța tăietoare în acea secțiune să fie nulă, respectiv

$$T_x = 0 \Rightarrow x = 3,10$$

Valoarea momentului încovoietor maxim este

$$M_{\max} = -92,43 + 62,03 \cdot 3,10 - 20 \cdot 3,10 \cdot \frac{3,10}{2} = 3,763 \text{ kNm}$$

Deschiderea 2 - 3

$$\begin{cases} \sum M_2 = 0; & -80,27 + 60 \cdot 2 + 60 \cdot 6 - T_{32} \cdot 8 = 0; & T_{32} = 49,97 \\ \sum M_3 = 0; & -80,27 + T_{23} \cdot 8 - 60 \cdot 6 - 60 \cdot 2 = 0; & T_{23} = 70,03 \end{cases}$$

În secțiunile B și C momentele încovoietoare au valorile

$$M_B = -80,27 + 70,03 \cdot 2 = 59,79 \text{ kNm}$$

$$M_C = -80,27 + 70,03 \cdot 6 - 60 \cdot 4 = 99,91 \text{ kNm}$$

Reacțiunile reale din reazeme se determină din condiția de echilibru pe verticală a porțiunilor de bară ce se găsesc în vecinătatea legăturilor cu baza de susținere (fig. 3.7.)

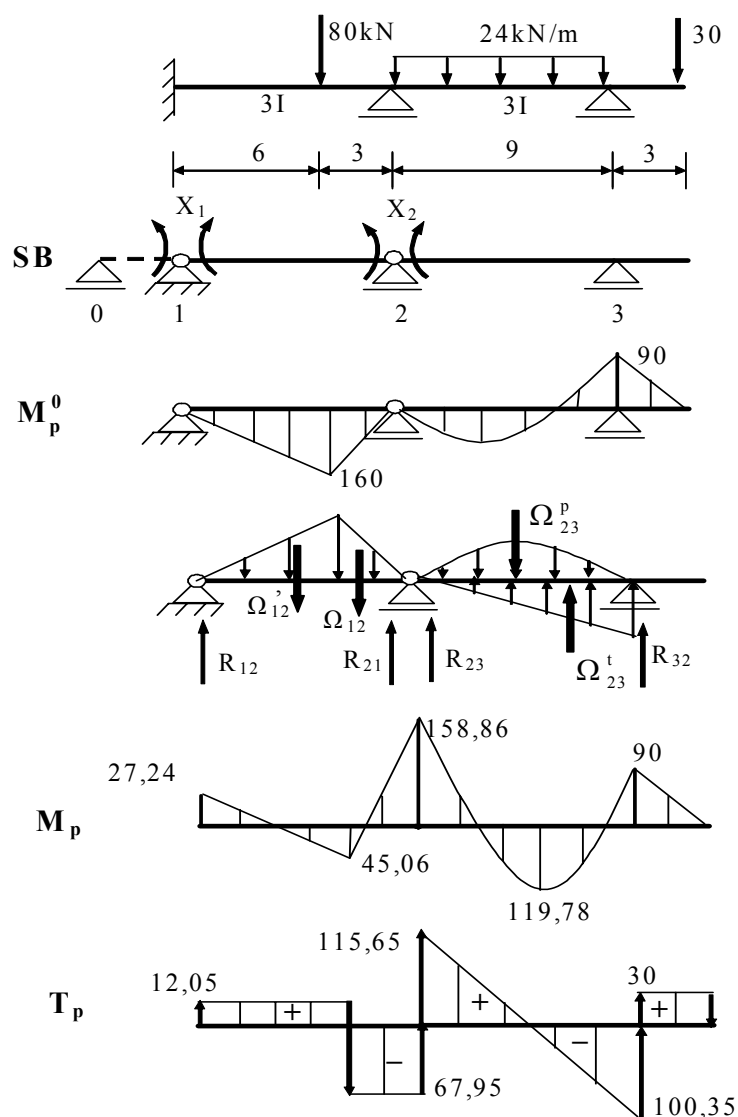
Pentru verificarea condiției de echilibru static se scrie ecuația de proiecție pe verticală a tuturor forțelor (încărcările date și reacțiunile din legăturile cu terenul), respectiv

$$\begin{aligned} \sum Y_i = 0; & \quad V_0 - 120 + V_1 - 20 \cdot 6 + V_2 - 60 - 60 + V_3 = \\ & = 44,59 - 120 + 133,38 - 120 + 132,06 - 120 + 49,97 = 0 \end{aligned}$$

Așa cum s-a prezentat anterior, condiția de echilibru static nu este suficientă pentru verificarea corectitudinii calculelor. În acest sens se verifică condiția de continuitate a deformatelor, respectiv, dacă rotirea relativă din secțiunile 1 respectiv 2 sunt nule.

EXEMPLUL 3.2 Să se traseze diagramele de eforturi la grinda continuă din figura 3.9.

Grinda continuă este de două ori static nedeterminată. Deoarece grinda are un capăt încastrat, sistemul de bază se obține prin atașarea unei deschideri fictive în extremitatea stângă având $I_{01} = \infty$.



- Fig.3.9 -

Considerând $I_0=3I$, lungimile transformate sunt:

$$\lambda_{01} = 0, \quad \lambda_{12} = 9 \frac{3I}{3I} = 9\text{m}, \quad \lambda_{23} = 9 \frac{3I}{3I} = 9\text{m}$$

Ecuatiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} \lambda_{01}X_0 + 2(\lambda_{01} + \lambda_{12})X_1 + \lambda_{12}X_2 + 6R_{10} \cdot \frac{I_0}{I_{01}} + 6R_{12} \cdot \frac{I_0}{I_{12}} = 0 \\ \lambda_{12}X_1 + 2(\lambda_{12} + \lambda_{23})X_2 + \lambda_{23}X_3 + 6R_{21} \cdot \frac{I_0}{I_{12}} + 6R_{23} \cdot \frac{I_0}{I_{23}} = 0 \end{cases}$$

Pentru calculul reacțiunilor fictive se vor utiliza ecuațiile de echilibru static pe fiecare deschidere astfel:

- pe deschiderea 1- 2, pentru încărcarea dată, diagrama M_p^0 nu este simetrică și în consecință pentru calculul reacțiunilor fictive, se va descompune diagrama în două diagrame triunghiulare (fig.3.9).

$$\Omega'_{12} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 160 = 480; \quad \Omega''_{12} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 160 = 240$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 480 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + 240 \cdot \left(6 + \frac{1}{3} \cdot 3\right) - R_{21} \cdot 9 = 0 \quad R_{21} = 400$$

$$\sum M_2 = 0; \quad R_{12} \cdot 9 - 480 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 6 + 3\right) - 240 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = 0 \quad R_{12} = 320$$

- pe deschiderea 2-3 diagrama M_p^0 se descompune într-o diagramă parabolică datorată încărcării de pe deschiderea 2-3 și o diagramă triunghiulară datorată încărcării de pe consolă (fig.3.9).

$$\Omega_{23}^{tr} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 90 = 405; \quad \Omega_{23}^p = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 243 = 1458$$

$$\sum M_2 = 0; \quad 1458 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 - 405 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 - R_{32} \cdot 9 = 0 \quad R_{32} = 459$$

$$\sum M_3 = 0; \quad R_{23} \cdot 9 - 1458 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 + 405 \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 = 0 \quad R_{23} = 594$$

Sistemul de ecuații devine

$$\begin{cases} 0 + 2(0 + 9)X_1 + 9X_2 = 0 - 6 \cdot 320 \cdot \frac{3I}{3I} \\ 9X_1 + 2(9 + 9)X_2 = -6 \cdot 400 \cdot \frac{3I}{3I} - 6 \cdot 594 \cdot \frac{3I}{3I} \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 18X_1 + 9X_2 + 1920 = 0 \\ 9X_1 + 36X_2 + 5964 = 0 \end{cases}$$

cu următoarele valori pentru necunoscute: $X_1 = -27,24$ și $X_2 = -158,86$

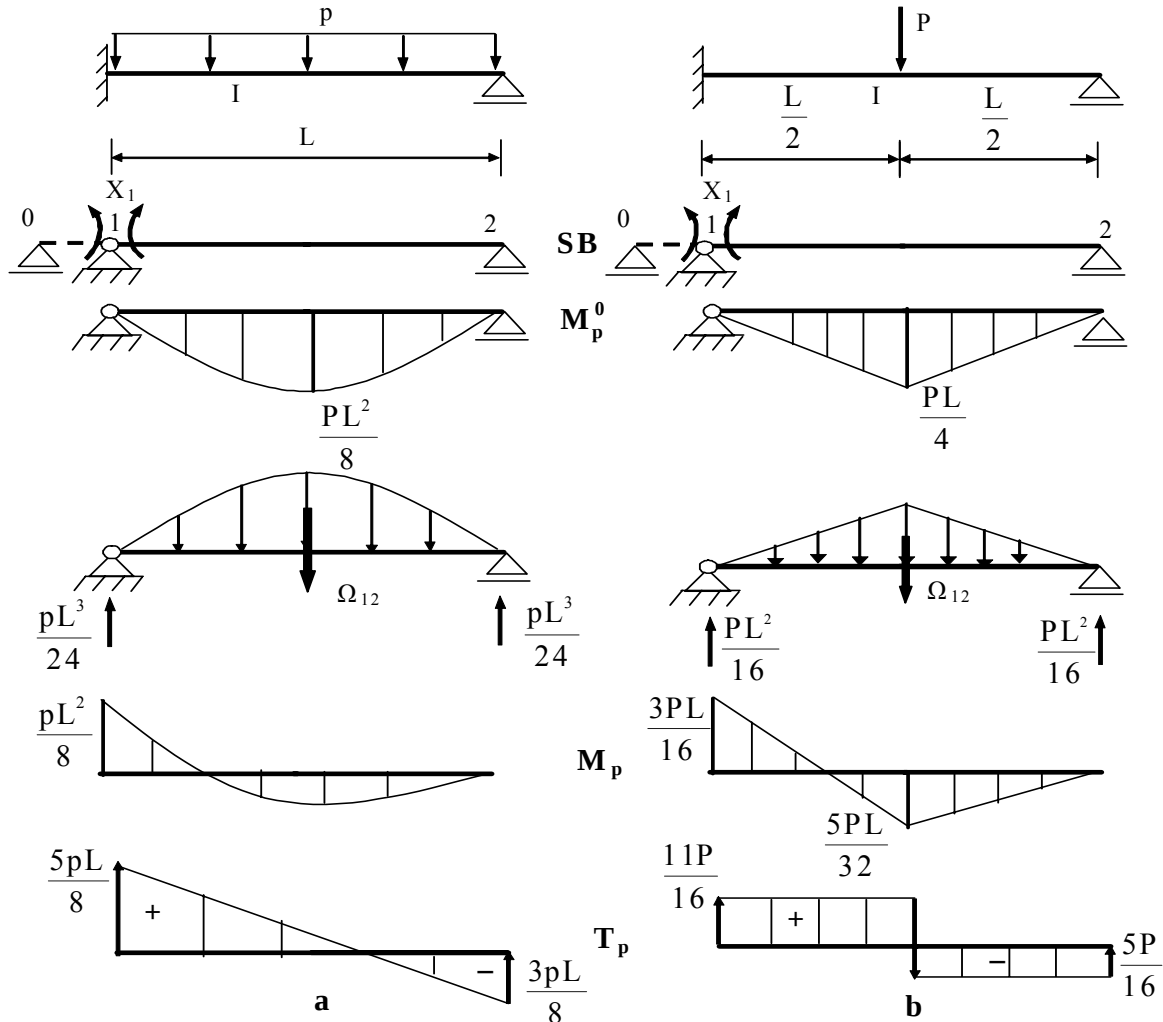
Diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 3.9.

3.1.2. Grinzi static nedeterminate cu o singură deschidere

Grinzile static nedeterminate cu o singură deschidere au o importanță deosebită în rezolvarea structurilor static nedeterminate prin metoda deplasărilor. Din această categorie fac parte grinda încastrată la un capăt și rezemată la celălalt și grinda dublu încastrată. În continuare se vor analiza câteva cazuri de încărcare a acestor grinzi, iar în tabelul 3.1 sunt prezentate și alte cazuri utilizate în practică.

3.1.2.1. Grinda încastrată-simplu rezemată

Fie grinda încastrată-simplu rezemată din figura 3.10,a încărcată cu o forță uniform distribuită.



- Fig.3.10 -

Considerând $I_0=I$, rezultă

$$\lambda_{12} = L$$

Reacțiunile fictive sunt

$$\Omega_{12} = \frac{2}{3} \cdot L \cdot \frac{pL^2}{8} = \frac{pL^3}{12};$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{1}{2} \cdot \Omega_{12} = \frac{pL^3}{24}$$

Ecuția de condiție are forma

$$2L \cdot X_1 + 6 \cdot \frac{pL^3}{24} = 0$$

de unde rezultă

$$X_1 = -\frac{pL^2}{8}$$

Diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare sunt prezentate în figura 3.10,a.

Pentru grinda încastrată-simplu rezemată din figura 3.10,b încărcată cu o forță concentrată, aplicată la mijlocul deschiderii se obțin următoarele rezultate:
Valorile reacțiunilor fictive sunt

$$\Omega_{12} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{pL}{4} = \frac{pL^2}{8}; \quad R_{12} = R_{21} = \frac{1}{2} \cdot \Omega_{12} = \frac{PL^2}{16}$$

Ecuția de condiție este

$$2L \cdot X_1 + 6 \cdot \frac{PL^2}{16} = 0$$

de unde

$$X_1 = -\frac{3PL}{16}$$

Diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 3.10,b.

3.1.2.2. Grinda dublu încastrată

Această grindă este de două ori static nedeterminată, deoarece are posibilitatea deformării axiale libere.

Fie grinda dublu încastrată din figura 3.11,a încărcată cu o forță uniform distribuită.

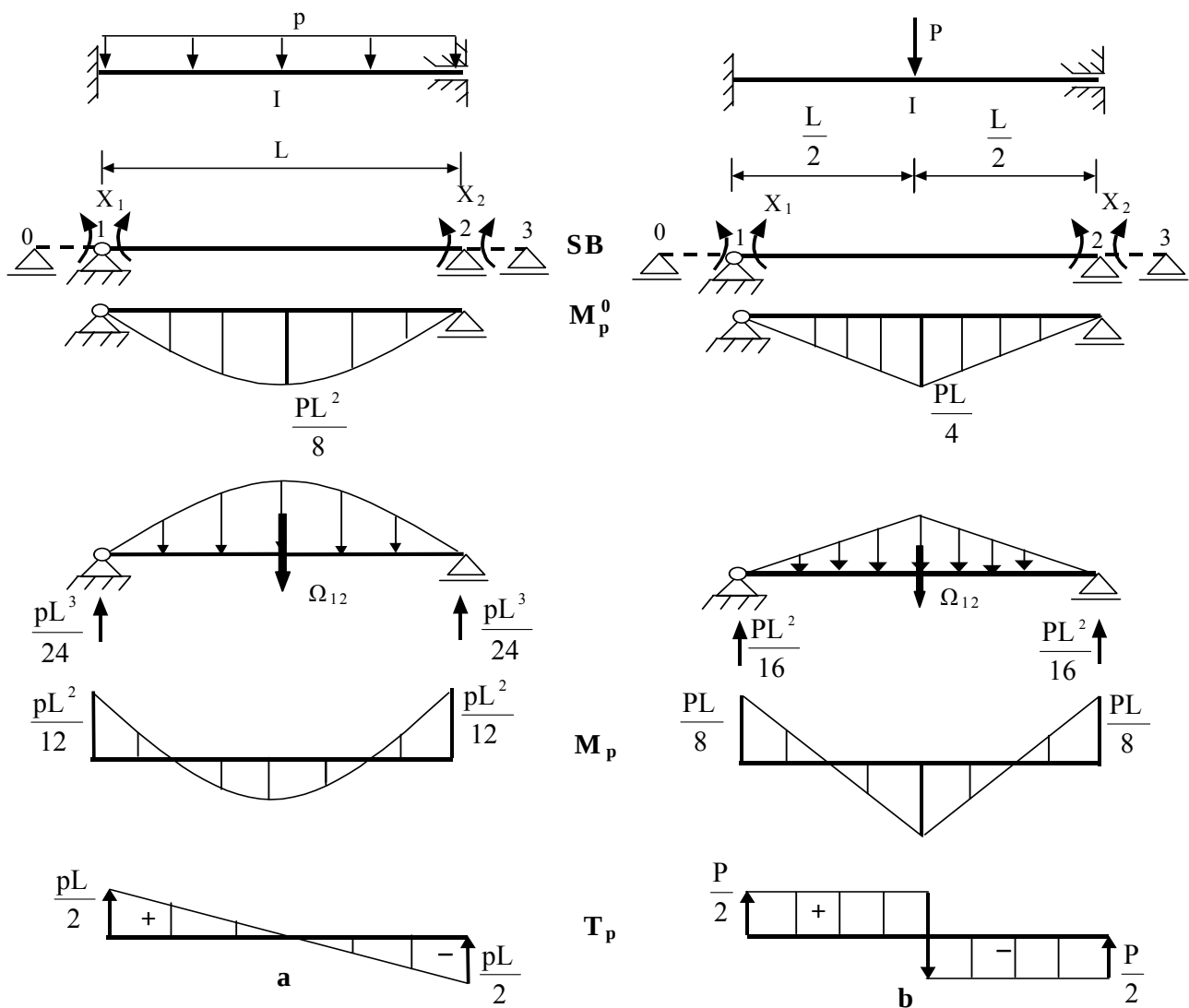
Deoarece sistemul de bază este identic cu cel de la bara încastrată – simplu rezemată, reacțiunile fictive au aceleași valori.

Sistemul de ecuații are forma

$$\begin{cases} 2L \cdot X_1 + L \cdot X_2 + 6 \frac{pL^3}{24} = 0 \\ L \cdot X_1 + 2L \cdot X_2 + 6 \frac{pL^3}{24} = 0 \end{cases}$$

de unde
$$X_1 = X_2 = -\frac{pL^2}{12}$$

Diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare sunt prezentate în figura 3.11,a.



- Fig.3.11 -

Pentru grinda dublu încastrată din figura 3.11,b încărcată cu o forță concentrată, aplicată la mijlocul deschiderii, sistemul ecuațiilor de condiție are forma

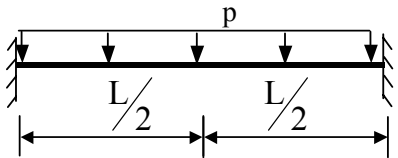
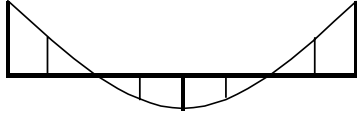
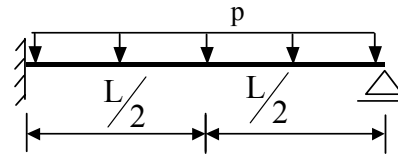
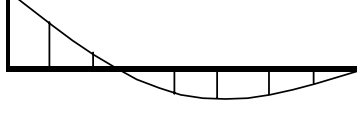
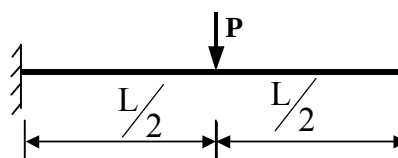
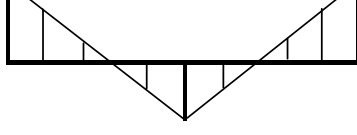
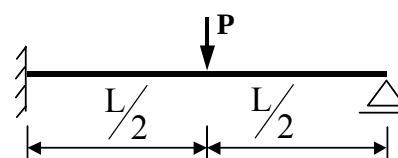
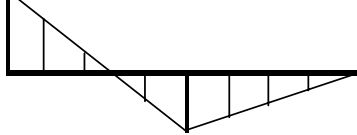
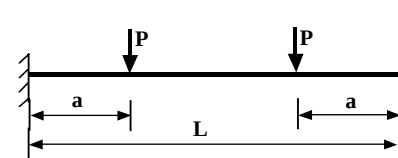
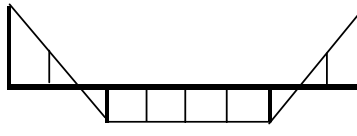
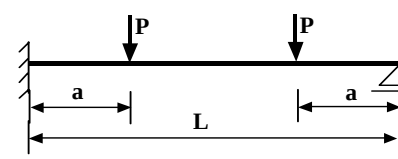
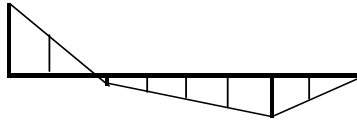
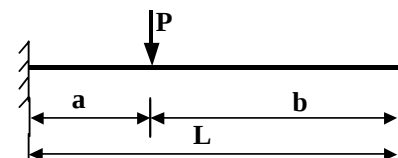
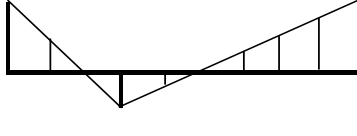
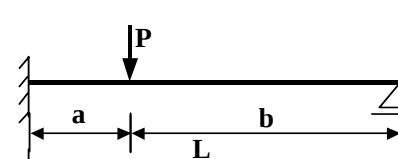
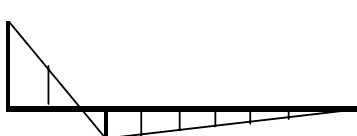
$$\begin{cases} 2L \cdot X_1 + L \cdot X_2 + 6 \frac{PL^2}{16} = 0 \\ L \cdot X_1 + 2L \cdot X_2 + 6 \frac{PL^2}{16} = 0 \end{cases}$$

de unde

$$X_1 = X_2 = -\frac{pL}{8}$$

Diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 3.11,b.

Tabelul 3.1

Bara	Diagrama de momente	Momentul de încastrare perfectă
		$M_{12} = M_{21} = \frac{pL^2}{12}$
		$M_{12} = \frac{pL^2}{8}$ $M_{21} = 0$
		$M_{12} = M_{21} = \frac{PL}{8}$
		$M_{12} = \frac{3PL}{16}$ $M_{21} = 0$
		$M_{12} = M_{21} = \frac{Pa(L-a)}{L}$
		$M_{12} = \frac{3Pa(L-a)}{2L}$ $M_{21} = 0$
		$M_{12} = \frac{Pab^2}{L^2}$ $M_{21} = \frac{Pa^2b}{L^2}$
		$M_{12} = \frac{Pab(L+b)}{2L^2}$ $M_{21} = 0$

3.1.3. Efectul acțiunii variației de temperatură la grinzile continue

La grinzile continue, deoarece unul dintre reazeme este fix (încăstrare sau articulație) iar celelalte reazeme sunt mobile, variația lungimii, la acțiunea temperaturii medii t_m din axa barei este liberă, deci nu produce eforturi.

Rezultă că numai diferența de temperatură dintre fibrele extreme Δt va produce deformarea prin încovoire.

La acțiunea variației de temperatură în expresia ecuației celor trei momente, descrisă prin relația (3.7), se schimbă numai termenul liber, respectiv

$$\lambda_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_k + 6EI_0\Delta_{jt} = 0 \quad (3.14)$$

Dacă se presupune că fibra inferioară este fibra mai caldă, atunci expresia termenului liber Δ_{jt} are următoarea formă:

$$\Delta_{jt} = \alpha \int m_j \frac{\Delta t}{h} dx = \alpha \cdot \left(\frac{\Delta t_{ij}}{h_{ij}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot L_{ij} + \frac{\Delta t_{jk}}{h_{jk}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot L_{jk} \right) \quad (3.15)$$

în care Δt_{ij} și Δt_{jk} sunt diferențele de temperatură pe cele două deschideri adiacente nodului j , h_{ij} și h_{jk} sunt înălțimile secțiunilor transversale ale deschiderilor ij respectiv jk , iar L_{ij} și L_{jk} sunt lungimile celor două deschideri.

Introducând relația (3.15) în (3.14) rezultă expresia finală a ecuației celor trei momente

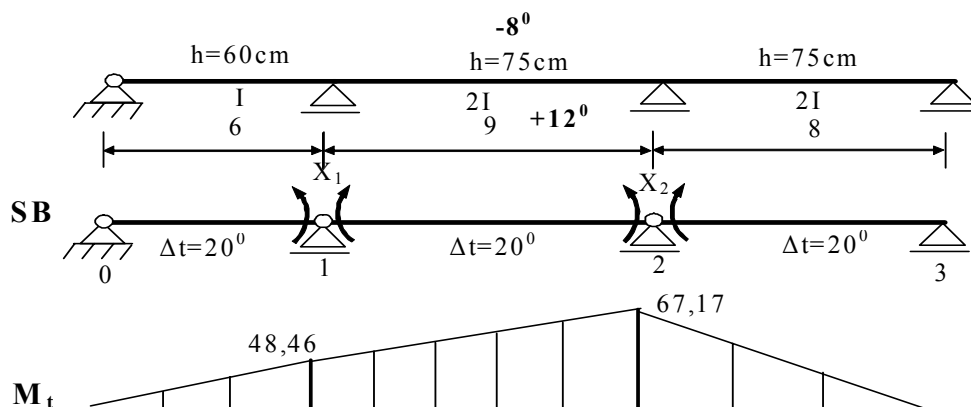
$$\lambda_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_k + 3EI_0\alpha \cdot \left(\frac{\Delta t_{ij}}{h_{ij}} \cdot L_{ij} + \frac{\Delta t_{jk}}{h_{jk}} \cdot L_{jk} \right) = 0 \quad (3.16)$$

Observație:

- Se constată că în cazul acțiunii variației de temperatură, eforturile depind de natura materialului, prin valoarea modului de elasticitate și de valoarea momentelor de inerție.

- Dacă fibra inferioară este mai rece, atunci termenul liber al relației (3.16) va fi afectat cu semnul minus.

EXEMPLUL 3.3 Să se traseze diagrama de moment încovoietor la grinda continuă din figura 3.12. Se dau: temperatura la fibra superioară -8° , temperatura la fibra inferioară $+12^\circ$, $EI=10^5 \text{ kNm}^2$, $\alpha=10^{-5} \text{ grad}^{-1}$, $h_{01}=60 \text{ cm}$, $h_{12}=75 \text{ cm}$, $h_{23}=75 \text{ cm}$.



- Fig. 3.12 -

Lungimile transformate calculate pentru $I_0=I$

$$\lambda_{01} = 6; \quad \lambda_{12} = 4,5; \quad \lambda_{23} = 4$$

Ecuatiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} 2(6 + 4,5)X_1 + 4,5X_2 + 3 \cdot 10^5 \cdot \alpha \left(\frac{20}{0,60} \cdot 6 + \frac{20}{0,75} \cdot 9 \right) = 0 \\ 4,5X_1 + 2(4,5 + 4)X_2 + 3 \cdot 10^5 \cdot \alpha \left(\frac{20}{0,75} \cdot 9 + \frac{20}{0,75} \cdot 8 \right) = 0 \end{cases}$$

sau

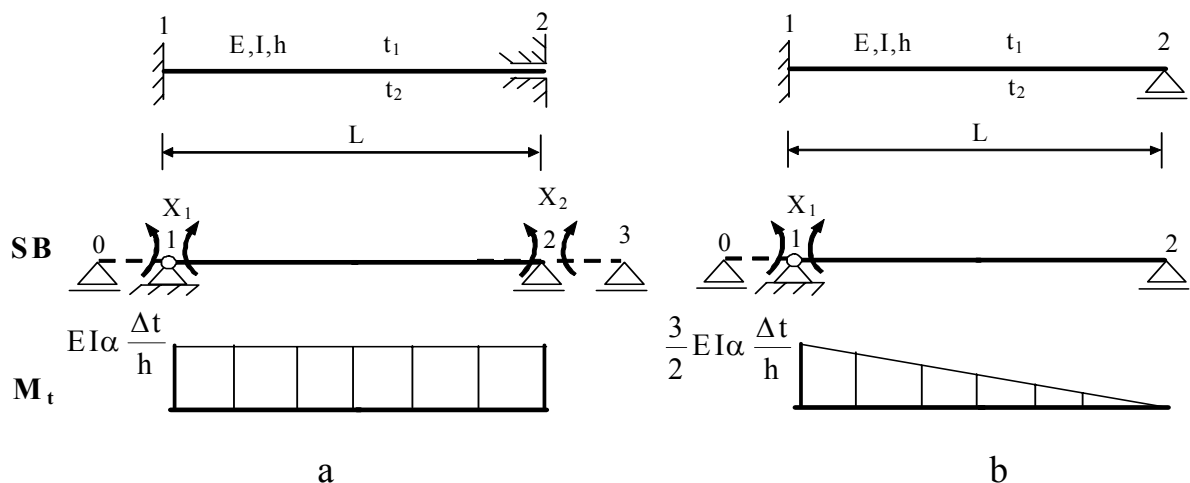
$$\begin{cases} 21X_1 + 4,5X_2 = -1320 \\ 4,5X_1 + 17X_2 = -1360 \end{cases}$$

cu valorile necunoscutele $X_1 = -48,46$ și $X_2 = -67,17$

Diagrama finală de moment încovoietor este dată în figura 3.12. Se constată că fibra mai rece este fibra întinsă.

EXEMPLUL 3.4 Să se traseze diagrama de moment încovoietor la grinzile cu o singură deschidere din figura 3.13 a și b. Se consideră $t_2 > t_1$ (fibra mai rece este fibra superioară).

Un interes deosebit îl prezintă încărcarea cu variație de temperatură a grinzilor continue cu o singură deschidere, deoarece diagramele de moment încovoietor obținute sunt utilizate în rezolvarea structurilor static nedeterminate prin metoda deplasărilor.



- Fig.3.13 -

Ecuatiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} 2LX_1 + LX_2 = -3 \cdot EI_0 \cdot \alpha \frac{\Delta t}{h} \cdot L \\ LX_1 + 2LX_2 = -3 \cdot EI_0 \cdot \alpha \frac{\Delta t}{h} \cdot L \end{cases}$$

Ecuatia de condiție este:

$$2LX_1 = -3 \cdot EI_0 \cdot \alpha \frac{\Delta t}{h} \cdot L$$

de unde rezultă:

$$X_1 = X_2 = -EI_0 \cdot \alpha \frac{\Delta t}{h}$$

$$X_1 = -\frac{3}{2} EI_0 \cdot \alpha \frac{\Delta t}{h}$$

Diagramele de moment încovoietor sunt prezentate în figura 3.13 a,b.

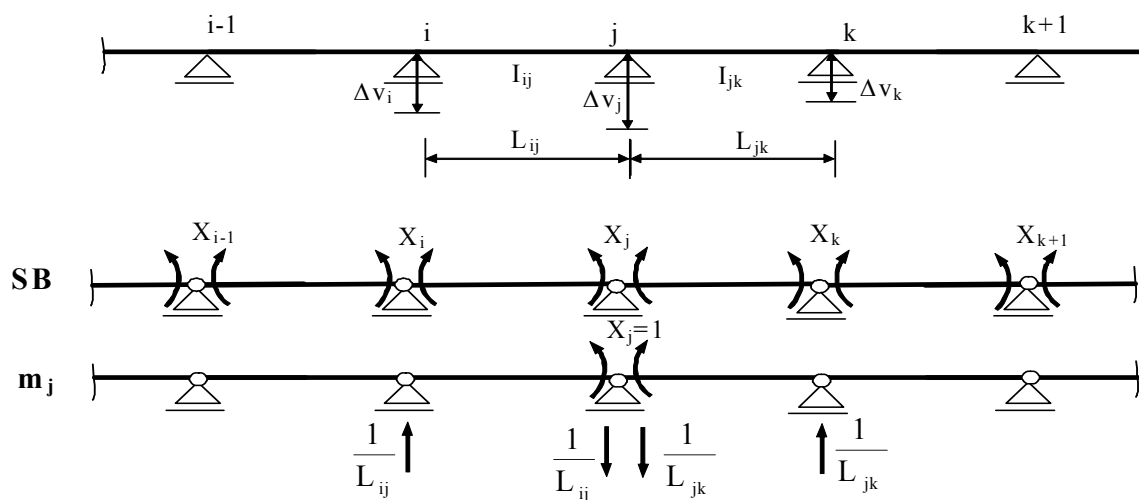
3.1.4. Efectul cedărilor de reazeme la grinzile continue

La grinzile continue, cedările de reazeme produc eforturi. Fie grinda continuă din figura 3.14 la care apar cedările de reazeme Δv_i , Δv_j și Δv_k .

În acest caz, forma ecuației celor trei momente, descrisă prin relația (3.7), devine

$$\lambda_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_k + 6EI_0\Delta_{j\Delta} = 0 \quad (3.17)$$

Încărcând sistemul de bază cu necunoscuta $X_j=1$ se obțin reacțiunile indicate în figura 3.14.



- Fig.3.14 -

Termenul $\Delta_{j\Delta}$ are forma:

$$\Delta_{j\Delta} = -\sum r_{kj} \Delta_k = -\left[-\frac{1}{L_{ij}} \cdot \Delta v_i + \left(\frac{1}{L_{ij}} + \frac{1}{L_{jk}} \right) \cdot \Delta v_j - \frac{1}{L_{jk}} \cdot \Delta v_k \right] \quad (3.18)$$

Ordonând termenii, relația (3.18) devine

$$\Delta_{j\Delta} = -\left[\frac{\Delta v_j - \Delta v_i}{L_{ij}} + \frac{\Delta v_j - \Delta v_k}{L_{jk}} \right] \quad (3.19)$$

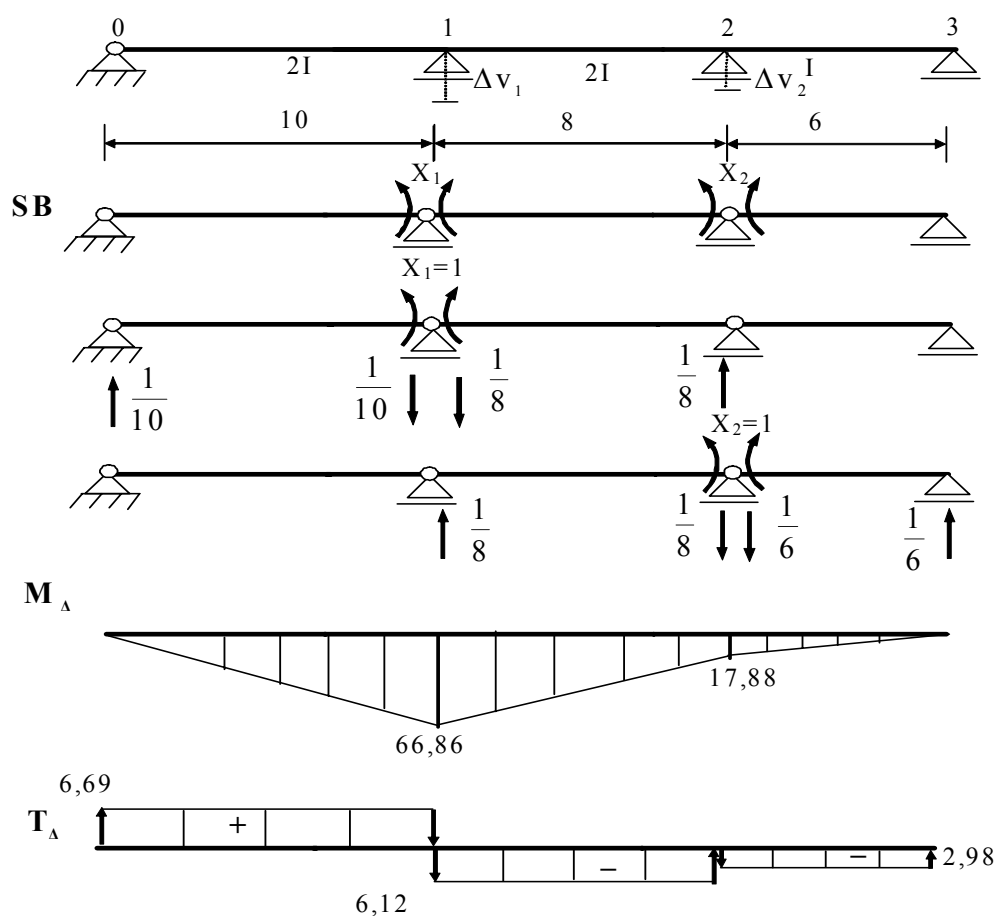
Ecuția celor trei momente în cazul cedărilor de reazeme capătă forma:

$$\lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k - 6EI_0 \left(\frac{\Delta v_j - \Delta v_i}{L_{ij}} + \frac{\Delta v_j - \Delta v_k}{L_{jk}} \right) = 0 \quad (3.20)$$

EXEMPLUL 3.5 Să se traseze diagrama de moment încovoietor la grinda continuă din figura 3.15. Se dau: $\Delta v_1 = 1,5\text{cm}$, $\Delta v_2 = 1\text{cm}$, $EI = 10^5 \text{kNm}$.

Lungimile transformate pentru $I_0 = I$ sunt:

$$\lambda_{01} = 10 \frac{I}{2I} = 5; \quad \lambda_{12} = 8 \frac{I}{2I} = 4; \quad \lambda_{23} = 6 \frac{I}{I} = 6$$



- Fig. 3.15 -

Ecuatiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} 2(5+4)X_1 + 4X_2 - 6EI \cdot \left(\frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{10} + \frac{1,5 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-2}}{8} \right) = 0 \\ 4X_1 + 2(4+6)X_2 - 6EI \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^{-2} - 1,5 \cdot 10^{-2}}{8} + \frac{1 \cdot 10^{-2}}{6} \right) = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 18X_1 + 4X_2 - 1275 = 0 \\ 4X_1 + 20X_2 - 625 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile

$$X_1 = 66,86 \text{ și } X_2 = 17,88$$

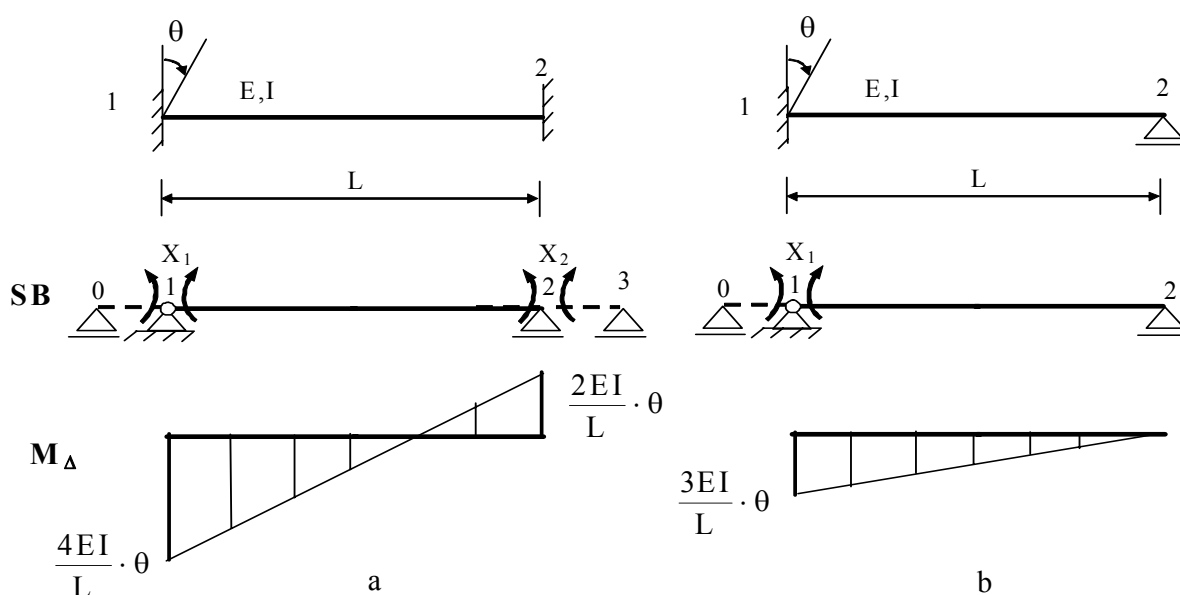
Momentele încovoietoare au fost calculate cu relația

$$M_{\Delta} = m_1 X_1 + m_2 X_2$$

și sunt date, împreună cu forțele tăietoare în figura 3.15.

EXEMPLUL 3.6 Să se traseze diagrama de moment încovoiator la grinzile cu o singură deschidere produse de rotirea θ (fig.3.16 a și b) și translația Δv (fig.3.17,a și b). Ca și în cazul încărcării cu forțe sau variație de temperatură prezintă interes, efectul cedărilor de reazeme la grinzile continue cu o singură deschidere, deoarece diagramele de moment încovoiator obținute sunt utilizate în rezolvarea structurilor static nedeterminate prin metoda deplasărilor.

Cazul rotirii θ (fig.3.16,a și b).



- Fig.3.16 -

Ecuatiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} 2LX_1 + LX_2 - 6EI\theta = 0 \\ LX_1 + 2LX_2 = 0 \end{cases}$$

Ecuatia de condiție este:

$$2LX_1 - 6EI\theta = 0$$

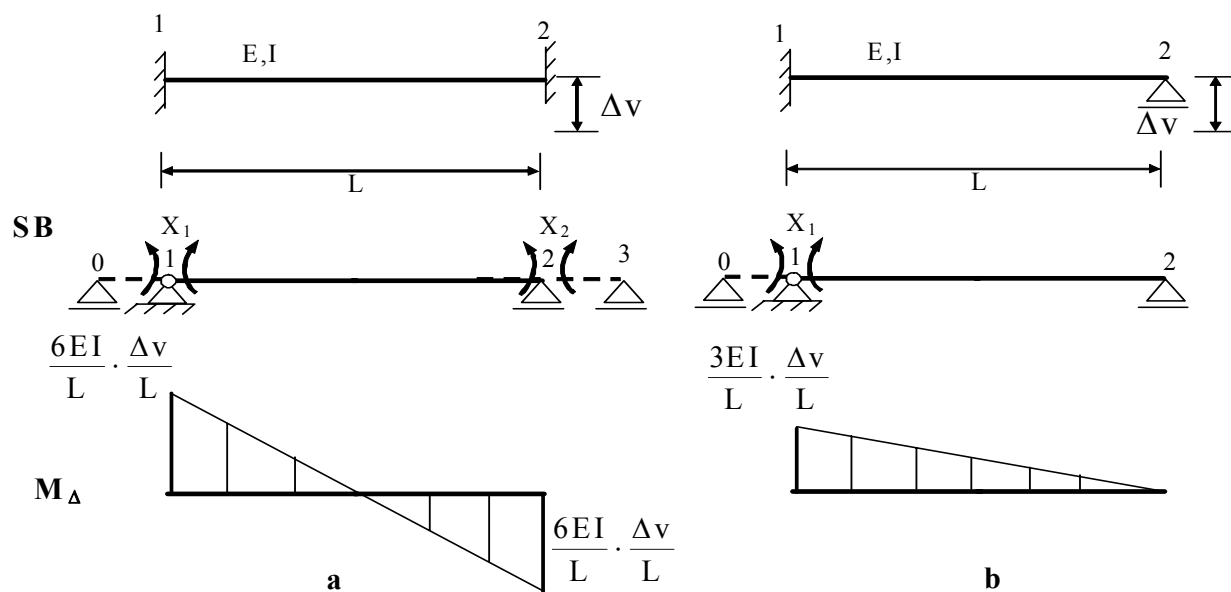
de unde

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{4EI}{L} \theta \\ X_2 &= -\frac{2EI}{L} \theta \end{aligned}$$

$$X_1 = \frac{3EI}{L} \theta$$

Diagramele de moment încovoiator sunt prezentate în figura 3.16 a,b.

Cazul deplasării Δv (fig.3.17,a și b).



- Fig.3.17 -

Ecuatiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} 2L \cdot X_1 + L \cdot X_2 - 6EI \cdot \left(-\frac{\Delta v}{L} \right) = 0 \\ L \cdot X_1 + 2L \cdot X_2 - 6EI \cdot \left(\frac{\Delta v}{L} \right) = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -\frac{6EI}{L} \cdot \frac{\Delta v}{L}$$

$$X_2 = \frac{6EI}{L} \cdot \frac{\Delta v}{L}$$

Ecuția de condiție este:

$$2L \cdot X_1 - 6EI \cdot \left(-\frac{\Delta v}{L} \right) = 0$$

$$X_1 = -\frac{3EI}{L} \cdot \frac{\Delta v}{L}$$

Diagramele de moment încovoietor sunt prezentate în figura 3.17 a,b.

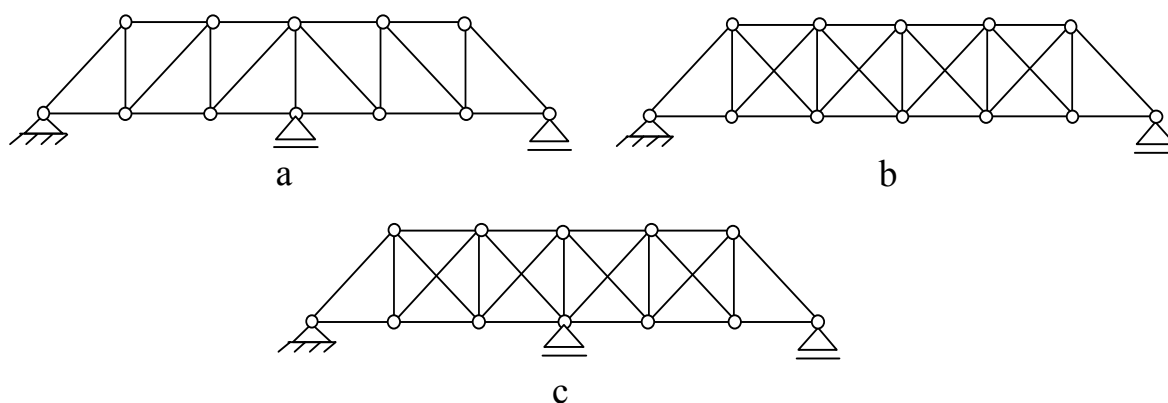
3.2. Grinzi cu zăbrele static nedeterminate

Grinzile cu zăbrele static nedeterminate se întâlnesc frecvent în practică. Calculul acestor tipuri de structuri are la bază aceleași ipoteze simplificatoare care au fost utilizate și la grinzile cu zăbrele static determinate, respectiv:

- axele barelor sunt concurente în noduri;
- nodurile se consideră a fi articulații perfecte;
- forțele se aplică, ca forțe concentrate, numai în noduri.

În consecință, în barele acestor grinzi apar numai eforturi axiale.

Grinzile cu zăbrele static nedeterminate pot fi static nedeterminate exterior (fig.3.18,a), interior (fig.3.18,b) sau mixt (interior și exterior în același timp, fig.3.18,c). În cazul grinzilor cu zăbrele care au diagonalele încrucișate, punctul lor de intersecție nu este nod, barele trecând una pe lângă cealaltă.



- Fig.3.18 -

Gradul de nedeterminare statică se stabilește cu relația

$$N = b + r - 2n \quad (3.21)$$

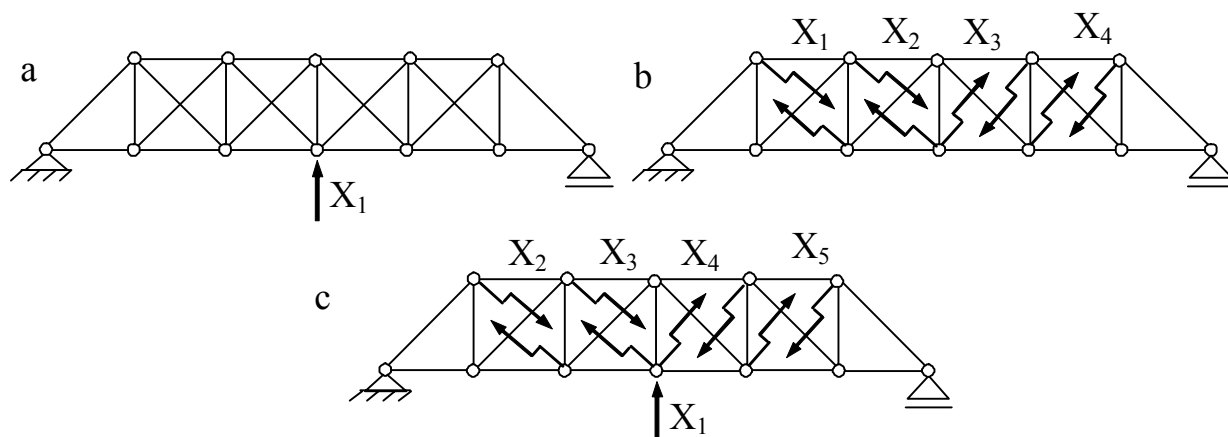
unde b reprezintă numărul de bare, r numărul de legături simple, iar n numărul de noduri.

Calculul grinzilor cu zăbrele static nedeterminate prin metoda eforturilor urmărește etapele generale prezentate anterior. Grinzile cu zăbrele din figura 3.18 au următoarele grade de nedeterminare statică:

- | | | |
|-------------------------------------|---------------------------|-------|
| - grinda cu zăbrele din fig. 3.18,a | $b=21$, $n=12$, $r=4$, | $N=1$ |
| - grinda cu zăbrele din fig. 3.18,b | $b=25$, $n=12$, $r=3$, | $N=4$ |
| - grinda cu zăbrele din fig. 3.18,c | $b=15$, $n=12$, $r=4$, | $N=5$ |

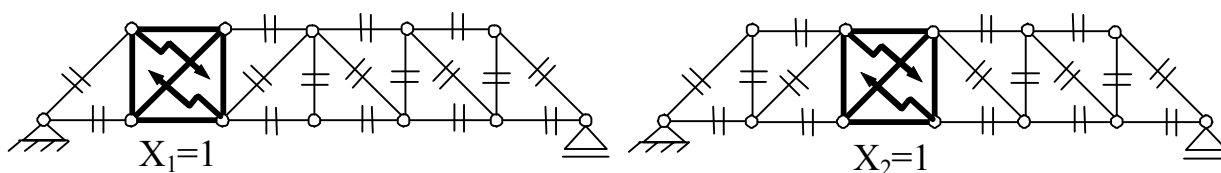
Sistemul de bază se obține prin secționări de bare și prin suprimări de legături cu terenul. Alegerea sistemului de bază trebuie efectuată cu deosebită atenție pentru a se obține un sistem static determinat și a se evita sistemele critice. Astfel, necunoscutele pot fi reacțiunile din rezemările suplimentare sau eforturile din barele suplimentare.

În figura 3.19 sunt prezentate sistemele de bază pentru grinzile cu zăbrele din figura 3.18.



- Fig. 3.19 -

De remarcat faptul că în cazul încărcării sistemului de bază cu necunoscuta efort într-o bară, diagonală dublă, apar eforturi numai în barele panoului în care acționează necunoscuta respectivă (fig.3.20).



- Fig. 3.20 -

În funcție de tipul necunoscutei, ecuația de condiție poate avea una din următoarele două forme:

a) în cazul unei necunoscute reacțiune (X_i), deplasarea pe direcția acesteia este egală cu zero, în situația reală, deci ecuația de condiție are forma obișnuită, adică

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{ii}X_i + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{ip} = 0 \quad (3.22)$$

b) în cazul unei necunoscute reprezentând efortul dintr-o bară, deplasarea reală pe direcția necunoscutei nu mai este egală cu zero, deoarece sub acțiunea efortului din bară aceasta se deformează, deci ecuația de condiție va avea forma:

$$\delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + \dots + \delta_{jj}X_j + \dots + \delta_{jn}X_n + \Delta_{jp} = -\rho_j X_j \quad (3.23)$$

unde $\rho_j X_j$ reprezintă deformația totală a barei.

Prin ρ_j s-a notat deformația barei produsă de un efort egal cu unitatea ($\rho_j = \frac{L_j}{EA_j}$, unde L_j reprezintă lungimea barei j , E modulul de elasticitate al materialului, iar A_j reprezintă aria secțiunii transversale a barei j).

Semnul minus din relația (3.23) ține seama de faptul că deplasarea din $X_j=1$ este pozitivă când nodurile în care acționează se apropie, iar deplasarea din structura reală produsă de efortul de întindere X_j este de sens invers.

Ecuația (3.23) se poate scrie și sub forma:

$$\delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + \dots + (\delta_{jj} + \rho_j)X_j + \dots + \delta_{jn}X_n + \Delta_{jp} = 0 \quad (3.24)$$

ceea ce arată că influența deformării barei apare ca o corectare a coeficientului necunoscutei principale X_j .

Deoarece în barele grinzii cu zăbrele apar numai eforturi axiale, coeficienții necunoscutelor și termenii liberi au următoarele expresii:

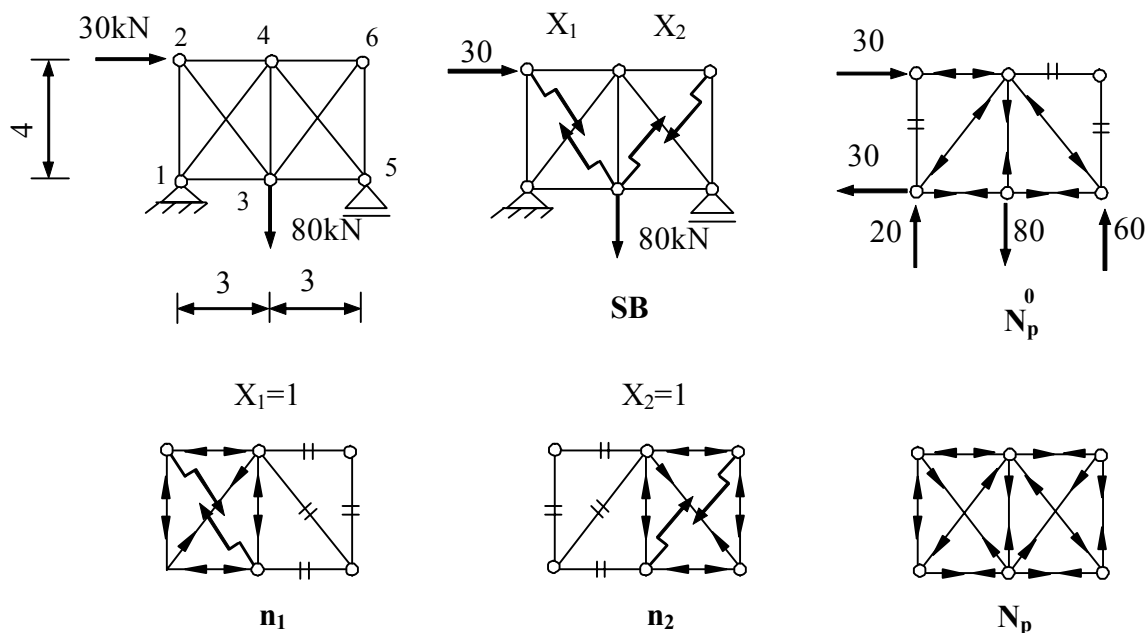
$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \int \frac{n_i^2}{EA} dx = \sum_{k=1}^{nr \text{ de bare}} \frac{n_i^2}{EA_k} L_k \\ \delta_{ij} &= \int \frac{n_i n_j}{EA} dx = \sum_{k=1}^{nr \text{ de bare}} \frac{n_i n_j}{EA_k} L_k \\ \Delta_{ip} &= \int \frac{n_i N_p^0}{EA_k} dx = \sum_{k=1}^{nr \text{ de bare}} \frac{n_i N_p^0}{EA_k} L_k \end{aligned} \quad (3.25)$$

După calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi și rezolvarea sistemului de ecuații, eforturile reale în bare se determină cu relația:

$$N_p = N_p^0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 + \dots + n_n X_n \quad (3.26)$$

În scopul sistematizării calculelor, determinarea coeficienților necunoscutelor, a termenilor liberi și a eforturilor finale din bare se organizează în tabel, așa cum se va vedea în cadrul aplicației ce urmează.

EXEMPLUL 3.7. Să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele static nedeterminate din figura 3.21. Secțiunea transversală a tălpilor este $2A$, iar secțiunea transversală a diagonalelor și montanților este A .



- Fig. 3.21 -

Grinda cu zăbrele este de două ori static nedeterminată (nedeterminarea este interioară). Sistemul de bază s-a ales prin secționarea barele suplimentare din fiecare panou.

Din încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta $X_1=1$ apar eforturi diferite de zero numai în barele panoului din care face parte bara în locul căreia s-a introdus necunoscuta X_1 , iar în bara suprimată apare un efort egal cu unitatea. În mod asemănător, din încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta $X_2=1$ apar eforturi diferite de zero numai în barele panoului din care face parte bara în locul căreia s-a introdus necunoscuta X_2 , iar în bara suprimată apare un efort egal cu unitatea.

Din încărcarea sistemului de bază cu forțele exterioare, eforturile în barele suprimate sunt zero, iar în celelalte bare pot fi zero sau diferite de zero.

Calculele au fost conduse în tabelul 3.2.

Tabelul 3.2

Bara k	L_k	A_k	N_p^0	n_1	n_2	$\frac{n_1^2}{EA_k} L_k$	$\frac{n_2^2}{EA_k} L_k$	$\frac{n_1 \cdot n_2}{EA_k} L_k$	$\frac{n_1 \cdot N_p^0}{EA_k} L_k$	$\frac{n_2 \cdot N_p^0}{EA_k} L_k$	N_p
1-2	4	A	0	-0.8	0	2,56/EA	0	0	0	0	-18,68
1-3	3	2A	45	-0.6	0	0,54/EA	0	0	-40,5/EA	0	30,99
1-4	5	A	-25	1	0	5/EA	0	0	-125/EA	0	-1,65
2-3	5	A	0	1	0	5/EA	0	0	0	0	23,35
2-4	3	2A	-30	-0.6	0	0,54/EA	0	0	27/EA	0	-44,01
3-4	4	A	80	-0.8	-0.8	2,56/EA	2,56/EA	2,56/EA	-256/EA	-256/EA	14,08
3-5	3	2A	45	0	-0.6	0	0,54/EA	0	0	-40,5/EA	10,11
3-6	5	A	0	0	1	0	5/EA	0	0	0	58,15
4-5	5	A	-75	0	1	0	5/EA	0	0	-375/EA	-16,85
4-6	3	2A	0	0	0.6	0	0,54/EA	0	0	0	34,89
5-6	5	A	0	0	0.8	0	2,56/EA	0	0	0	46,52

Însumând pe coloane se obțin următoarele valori ale coeficienților necunoscutelor și ale termenilor liberi

$$\delta_{11} = \frac{10,52}{EA} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2,56}{EA} \quad \delta_{22} = \frac{10,52}{EA}$$

$$\Delta_{1p} = \frac{-394,50}{EA} \quad \Delta_{2p} = \frac{-671,50}{EA}$$

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} 10,52X_1 + 2,56X_2 - 394,50 = 0 \\ 2,56X_1 + 10,52X_2 - 671,50 = 0 \end{cases}$$

Valorile necunoscutelor sunt

$$X_1 = 23,35 \text{ și } X_2 = 58,15$$

Eforturile finale calculate prin suprapunere de efecte

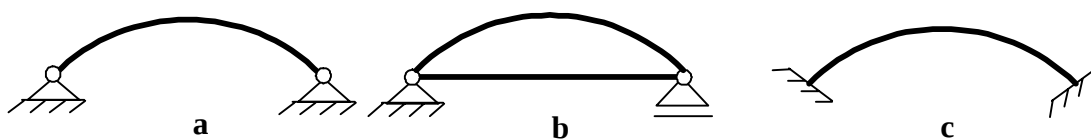
$$N_p = N_p^0 + n_1 X_1 + n_2 X_2$$

sunt trecute în ultima coloană a tabelului 3.2 și reprezentate în figura 3.21.

3.3. Arce static nedeterminate

Arcele static nedeterminate se întâlnesc la baraje, conducte pentru alimentări cu apă, poduri și pentru acoperirea unor suprafețe mari (săli de sport, și de spectacole). Tipurile de arce static nedeterminate sunt:

- arcul dublu articulat (fig.3.22,a)
- arcul cu tirant (fig.3.22,b)
- arcul dublu încastrat (fig.3.22,c)



- Fig. 3.22 -

Arcele se realizează cu secțiunea transversală constantă - arcele cu deschidere mică, sau cu secțiunea transversală variabilă - arcele cu deschidere mare.

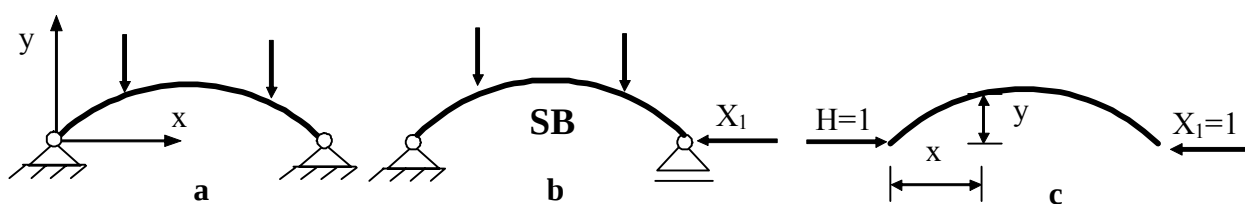
Arcele se caracterizează prin faptul că eforturile axiale au o influență mai mare decât în cazul structurilor în formă de cadre. De aceea la calculul deplasărilor elastice trebuie să se țină samă atât de efectul momentului încovoietor cât și de cel al forței axiale.

În mod obișnuit în construcții se utilizează arce pleoștite $\left(\frac{1}{5} < \frac{f}{L} < \frac{1}{10}\right)$ și cu grosime mică, la care influența curburii asupra deplasărilor elastice este neglijabilă. Ca urmare, calculul acestora se face cu ajutorul formulei Maxwell-Mohr, stabilită pentru barele drepte. Se mai face precizarea că, datorită formei curbe a axei arcului, diagramele de eforturi sunt curbilinii și în consecință pentru rezolvarea integralelor nu se mai poate aplica regula lui Vereșciaghin.

În continuare sunt prezentate elementele teoretice pentru cele trei tipuri de arce enumerate anterior, arce, la care reazemele sunt la același nivel, iar încărcările sunt gravitaționale.

3.3.1. Arcul dublu articulat

Arcul dublu articulat (fig.3.23,a) este o structură o dată static nedeterminată. De obicei, sistemul de bază se alege sub forma arcului simplu rezemat, iar necunoscuta este împingerea totală a arcului static nedeterminat.



- Fig. 3.23 -

Ecuția de condiție are forma:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0 \quad (3.27)$$

Deoarece în cazul arcelor, atât momentul încovoietor cât și forța axială sunt importante, în calculul lui δ_{11} și Δ_{1p} se vor introduce ambele efecte. Expresiile lor sunt:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{m_1^2}{EI} ds + \int \frac{n_1^2}{EA} ds \\ \Delta_{1p} &= \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} ds + \int \frac{n_1 N_p^0}{EA} ds \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pentru sistemul de bază ales, eforturile în secțiunea curentă produse de încărcarea cu necunoscuta $X_1=1$ sunt (fig.3.23,b și c)

$$m_1 = -y \quad n_1 = -\cos \varphi \quad (3.29)$$

Semnul minus apare în expresia momentului încovoietor pentru a marca faptul că fibra întinsă este cea de la extrados, iar în expresia forței axiale pentru că efortul este de compresiune.

Introducând expresiile (3.29) în (3.28) se obține

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{y^2}{EI} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds \\ \Delta_{1p} &= -\int \frac{y M_p^0}{EI} ds - \int \frac{N_p^0 \cos \varphi}{EA} ds \end{aligned} \quad (3.30)$$

Presupunând că arcul are secțiunea transversală variabilă și considerând caracteristicile secțiunii de la cheie (I_0 și A_0) ca elemente de comparație, expresiile (3.30) devin:

$$\begin{aligned} EI_0 \delta_{11} &= \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds \\ EI_0 \Delta_{1p} &= - \int \frac{I_0}{I} y M_p^0 ds - \int \frac{I_0}{A} N_p^0 \cos \varphi ds \end{aligned} \quad (3.31)$$

Introducând expresiile (3.31) în ecuația de condiție (3.27) se obține următoarea expresie a necunoscutei X_1

$$X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p^0 ds + \int \frac{I_0}{A} N_p^0 \cos \varphi ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds} \quad (3.32)$$

Referitor la importanța relativă a termenilor care intervin în expresia (3.32) trebuie remarcate următoarele:

- importanța relativă a termenilor de la numărător depinde de forma arcului și de tipul de încărcare exterioară. În situația de față datorită sistemului de bază ales și a încărcării cu forțe verticale, efectul momentului încovoietor este predominant astfel că cel de-al doilea termen se poate neglija,

- termenul al doilea de la numitor, care reprezintă efectul forței axiale, nu se va neglija, deși efectul său este relativ redus.

Calculul direct al integralelor din expresia (3.32) nu se poate efectua decât în unele cazuri particulare. Pentru aceasta se fac unele aproximații cum ar fi:

- se consideră că $dx = ds \cdot \cos \varphi$;
- se consideră că secțiunea transversală a arcului variază după o lege de forma $A = A_0 \cdot \cos \varphi$.

Cu aceste elemente, cel de-al doilea termen de la numitor capătă forma:

$$\int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds = \int_0^L \frac{I_0}{A_0 \cos \varphi} \cdot \cos^2 \varphi \frac{dx}{\cos \varphi} = \int_0^L \frac{I_0}{A_0} dx = L \cdot i_0^2 \quad (3.33)$$

unde i_0 = este raza de inerție a secțiunii de la cheie.

Cu aceste elemente, expresia necunoscutei X_1 , pentru arce pleoștite încărcate cu forțe verticale, devine:

$$X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \quad (3.34)$$

După calculul necunoscutei, eforturile în secțiunea curentă se determină cu relațiile

$$\begin{aligned} M_p &= M_p^0 + m_1 X_1 = M_p^0 - y \cdot X_1 \\ N_p &= N_p^0 + n_1 X_1 = N_p^0 - X_1 \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.35)$$

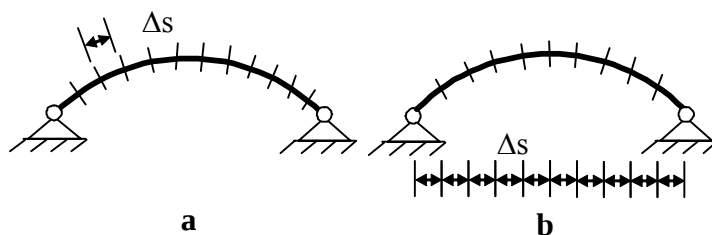
Necunoscuta X_1 reprezintă împingerea arcului. De remarcat faptul că, cei doi termeni care intervin în expresia momentului încovoietor din relația (3.35) sunt de același ordin de mărime, astfel că pentru obținerea unor rezultate corecte este necesar să se folosească un număr suficient de zecimale (2-3) pentru obținerea valorii necunoscutei X_1 .

Analizând expresiile stabilite pentru determinarea necunoscutei X_1 , rezultă că este necesar să se cunoască atât forma axei arcului cât și legea de variație a momentului de inerție. În mod obișnuit arcele folosite au axa parabolică sau circulară. În ceea ce privește secțiunea, ea se adoptă de obicei constantă.

În funcție de caracteristicile arcului, rezolvarea integralelor se poate realiza prin una din următoarele modalități:

- *integrare directă*. Se efectuează când forma axei arcului și legea de variație a momentului de inerție au expresii matematice simple. În acest mod se calculează mai ales arcele parabolice și circulare.

- *operare prin bolțari*. Se aplică atunci când forma axei arcului și legea de variație a momentului de inerție nu permit obținerea unor expresii matematice simple. Integralele se transformă în sume prin împărțirea arcului într-un număr finit de porțiuni cu lungimea Δs , numite *bolțari*. Bolțarii pot avea lungimea constantă (fig. 3.24,a), sau proiecția lor pe orizontală constantă (fig. 3.24,b).



- Fig. 3.24 -

În aceste condiții expresia (3.34) a necunoscutei devine:

$$X_1 = \frac{\sum \frac{I_0}{I} y M_p^0 \Delta s}{\sum \frac{I_0}{I} y^2 \Delta s + L \cdot i_0^2} = \frac{\sum y M_p^0 W}{\sum y^2 W + L \cdot i_0^2} \quad (3.36)$$

unde $W = \frac{I_0}{I} \Delta s$ reprezintă lungimea transformată a bolțarului.

Elementele ce alcătuiesc expresia necunoscutei, respectiv, y , M_p^0 și W se calculează pentru secțiunea din centrul de greutate al bolțarului (în mijlocul fiecărui bolțar). Pentru sistematizare, întreaga rezolvare se organizează în tabel (vezi exemplul 3.10).

Înlocuirea integrării directe prin sumare reprezintă o aproximație, care este cu atât mai strânsă cu cât numărul bolțarilor este mai mare. Practic însă numărul de 8-10 bolțari asigură o exactitate suficientă a calculului.

Efectul variației de temperatură. Ecuația de condiție în acest caz devine:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0 \quad (3.37)$$

unde

$$\Delta_{1t} = \alpha \int n_i \cdot t_m \cdot ds + \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot m_i \cdot ds \quad (3.38)$$

cu t_m temperatura medie din axa barei, Δt diferența de temperatură, h înălțimea secțiunii transversale a arcului, iar α coeficientul de dilatare termică liniară.

Tinând seama că $m_i = -y$ și $n_i = -\cos \varphi$ se obține

$$\Delta_{1t} = -\alpha \cdot t_m \cdot L - \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot y \cdot ds \quad (3.39)$$

deoarece $\int \cos \varphi ds = \int_0^L dx = L$

iar necunoscuta X_1 are expresia

$$X_1 = EI_0 \alpha \frac{\int \frac{\Delta t}{h} y ds + L \cdot t_m}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \quad (3.40)$$

În continuare se consideră două cazuri particulare de încărcare:

a) dacă arcul se află în aer liber, unde $\Delta t=0$ și numai $t_m \neq 0$ necunoscuta X_1 devine:

$$X_1 = EI_0 \alpha \frac{L \cdot t_m}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \quad (3.41)$$

Expresia momentului încovoietor într-o secțiune oarecare este

$$M_t = m_1 \cdot X_1 = -y \cdot X_1 \quad (3.42)$$

În figura 3.25,a este reprezentată diagrama de moment încovoietor pentru $t_m > 0$, iar în figura 3.25,b pentru $t_m < 0$.

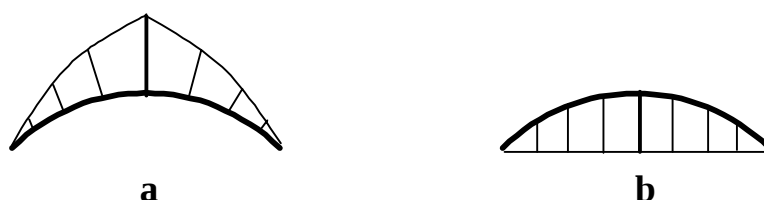


Fig.3.25

În ceea ce privește forța axială, ea este de compresiune pentru $t_m > 0$ și de întindere pentru $t_m < 0$.

b) Dacă arcul este supus unei variații de temperatură pentru care $t_m=0$ și $\Delta t \neq 0$, unde $\Delta t > 0$, expresia necunoscutei X_1 este:

$$X_1 = EI_0 \alpha \frac{\int \frac{\Delta t}{h} y ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \quad (3.43)$$

Efectul cedărilor de reazeme. Ecuația de condiție în acest caz devine:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0 \quad (3.44)$$

unde

$$\Delta_{i\Delta} = -\sum r_{ki} \Delta_k \quad (3.45)$$

În acest caz expresia necunoscutei devine:

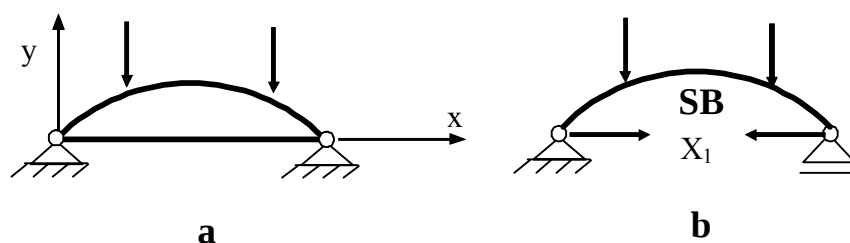
$$X_1 = EI_0 \frac{\sum r_{ki} \Delta_k}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \quad (3.46)$$

În legătură cu cedările de reazeme la arcul dublu articulat, cu reazeme la același nivel, trebuie remarcat faptul că numai o variație a distanței dintre reazeme conduce la apariția de eforturi. Cedările de reazeme pe verticală, care conduc la rotirea liniei reazemelor, reprezintă o rotire de corp rigid în jurul uneia dintre articulații.

3.3.2 Arcul cu tirant

Arcul cu tirant se utilizează în cazul în care împingerile arcului dublu articulat nu pot fi preluate prin sistemul de rezemare. Asemenea situații se întâlnesc la realizarea acoperișurilor de deschideri mari. Prezența tirantului face ca distanța dintre extremitățile arcului să se modifice cu o anumită cantitate (alungirea tirantului). Din această cauză comportarea arcului cu tirant este puțin diferită de cea a arcului dublu articulat, la care distanța dintre extremități este invariabilă.

Se consideră arcul cu tirant din figura 3.26,a încărcat cu forțe verticale.



- Fig.3.26 -

Arcul este tot o singură dată static nedeterminat. Sistemul de bază se alege prin secționarea tirantului. Se obține tot un arc simplu rezemat, dar trebuie să se introducă în expresia coeficientului necunoscutei și efectul efortului axial din tirant.

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds + \int \frac{n_1^2}{EA} ds + \int \frac{n_t^2}{E_t A_t} dx \quad (3.47)$$

sau ținând sama că $m_1 = -y$, $n_1 = -\cos \varphi$ și $n_t = 1$ rezultă:

$$EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds + \int \frac{E \cdot I_0}{E_t \cdot A_t} dx \quad (3.48)$$

Introducând aproximațiile făcute la arcul dublu articulată relația (3.48) devine

$$EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2 + L \cdot i_t^2 \quad (3.49)$$

unde s-a notat cu $i_t^2 = \frac{E \cdot I_0}{E_t \cdot A_t}$, unde E_t și A_t fiind caracteristicile tirantului, iar E și I_0 ale arcului.

Necunoscuta, care reprezintă efortul din tirant, are forma

$$X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot (i_0^2 + i_t^2)} \quad (3.50)$$

După calculul necunoscutei, eforturile în secțiunea curentă se determină cu aceleași relații prezentate la arcul dublu articulată.

Efectul variației de temperatură. Ecuația de condiție este:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0 \quad (3.51)$$

unde

$$\Delta_{1t} = \alpha \int n_i \cdot t_m \cdot ds + \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot m_i \cdot ds + \alpha_t \int n_t \cdot t_{mt} \cdot dx \quad (3.52)$$

cu t_m temperatura medie din axa arcului, Δt diferența de temperatură, h înălțimea secțiunii transversale a arcului, α coeficientul de dilatare termică al arcului, t_{mt} temperatura medie din axa tirantului, iar α_t coeficientul de dilatare termică al tirantului.

Tinând seama că $m_i = -y$, $n_i = -\cos \varphi$ și $n_t = +1$ se obține:

$$\Delta_{1t} = -\alpha \cdot t_m \cdot L - \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot y \cdot ds + \alpha_t \cdot t_{mt} \cdot L \quad (3.53)$$

deoarece $\int \cos \varphi ds = \int_0^L dx = L$.

Necunoscuta X_1 are expresia

$$X_1 = EI_0 \frac{\alpha \int \frac{\Delta t}{h} y ds + \alpha \cdot L \cdot t_m - \alpha_t \cdot L \cdot t_{mt}}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot (i_0^2 + i_t^2)} \quad (3.54)$$

Dacă arcul se află în aer liber ($t_m \neq 0$ și $\Delta t=0$) pot fi întâlnite două situații:

- temperatura medie este diferită pentru arc și tirant ($t_m \neq t_{mt}$). În acest caz termenul liber are expresia

$$\Delta_{it} = -\alpha \cdot t_m \cdot L - \alpha_t \cdot t_{mt} \cdot L \quad (3.55)$$

iar efortul din tirant rezultă

$$X_1 = EI_0 \frac{\alpha \cdot L \cdot t_m - \alpha_t \cdot L \cdot t_{mt}}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot (i_0^2 + i_t^2)} \quad (3.56)$$

- temperatura medie este aceeași pentru arc și tirant ($t_m = t_{mt}$). În acest caz termenul liber are expresia

$$\Delta_{it} = -\alpha \cdot t_m \cdot L + \alpha_t \cdot t_{mt} \cdot L \quad (3.57)$$

iar efortul din tirant rezultă

$$X_1 = EI_0 \frac{L \cdot t_m \cdot (\alpha - \alpha_t)}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot (i_0^2 + i_t^2)} \quad (3.58)$$

Dacă coeficienții de dilatare termică sunt egali ($\alpha = \alpha_t$), atunci $X_1=0$.

Efectul cedărilor de reazeme. Tinând cont de faptul că numai o deplasare relativă a reazemelor pe orizontală poate produce eforturi, efectul cedărilor de reazeme la arcul cu tirant poate fi privit astfel: se consideră că tirantul este precomprimat, respectiv are loc o scurtare a sa cu o cantitate Δu_t .

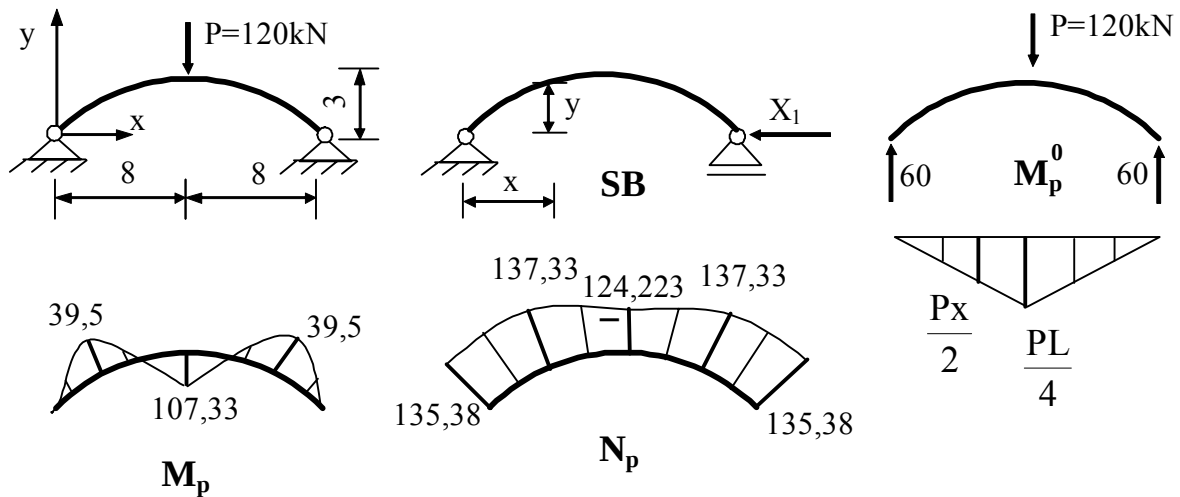
Expresia necunoscută X_1 numai din încărcarea cu scurtarea este:

$$X_1 = \frac{EI_0 \Delta_{ut}}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \quad (3.59)$$

iar momentul încovoiător se calculează cu relația

$$M_\Delta = m_1 \cdot X_1 = -y \cdot X_1 \quad (3.60)$$

EXEMPLUL 3.8 Să se traseze diagramele de moment încovoiător și de forță axială la arcul dublu articulat din figura 3.27. Arcul este parabolic cu secțiune constantă ($b \times h = 40 \times 60 \text{ cm}^2$).



- Fig.3.27 -

Sistemul de bază ales este arcul simplu rezemat. Deoarece diagramele m_1 și M_p^0 sunt simetrice, integrarea se va efectua numai pe jumătate de arc, rezultatele finale fiind înmulțite cu 2. Încărcarea fiind simplă se va utiliza integrarea directă.

Expresia necunoscutei – în cazul secțiunii constante este

$$X_1 = \frac{\int y M_p^0 ds}{\int y^2 ds + L \cdot i_0^2}$$

Expresiile momentelor încovoiătoare în secțiunea curentă sunt: $m_1 = -y$, $M_p^0 = \frac{Px}{2}$, iar $y = \frac{4fx(L-x)}{L^2}$

Deoarece arcul este pleoștit se va admite că $ds=dx$. Termenii care intervin în expresia necunoscutei X_1 au următoarele forme:

$$\int y M_p^0 ds = 2 \int_0^{L/2} \frac{4fx(L-x)}{L^2} \cdot \frac{Px}{2} dx = \frac{5PL^2f}{48} = 9600$$

$$\int y^2 ds = \int_0^{L/2} \frac{16f^2 x^2 (L-x)^2}{L^4} dx = \frac{8Lf^2}{15} = 76,80$$

$$L \cdot i_0^2 = L \frac{I}{A} = L \frac{h^2}{12} = 16 \cdot \frac{0,6^2}{12} = 0,48$$

Necunoscuta X_1 are valoarea:

$$X_1 = \frac{9600}{76,80 + 0,48} = 124,223 \text{ kN}$$

Momentele încovoietoare se determină cu relația: $M_p = M_p^0 - yX_1$

- secțiunea de la cheie ($x=L, y=f$)

$$M_c = \frac{PL}{4} - f \cdot X_1 = 480 - 3 \cdot 124,223 = 107,33 \text{ Nm}$$

- secțiunea de la sfertul deschiderii $\left(x = \frac{L}{2}, y = \frac{3}{4}f \right)$

$$M_s = \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{4} - \frac{3}{4}f \cdot X_1 = 240 - 279,50 = -39,5 \text{ kNm}$$

Forțele axiale se determină cu relația: $N_p = N_p^0 - X_1 \cos \varphi$

- secțiunea de la nașteri: $\cos \varphi_1 = 0,8$; $\sin \varphi_1 = 0,6$

$$N_1 = -\frac{P}{2} \sin \varphi_1 - X_1 \cos \varphi_1 = -135,38 \text{ kN}$$

- secțiunea de la sfert: $\cos \varphi_s = 0,936$; $\sin \varphi_s = 0,351$

$$N_s = -\frac{P}{2} \sin \varphi_s - X_1 \cos \varphi_s = -137,33 \text{ kN}$$

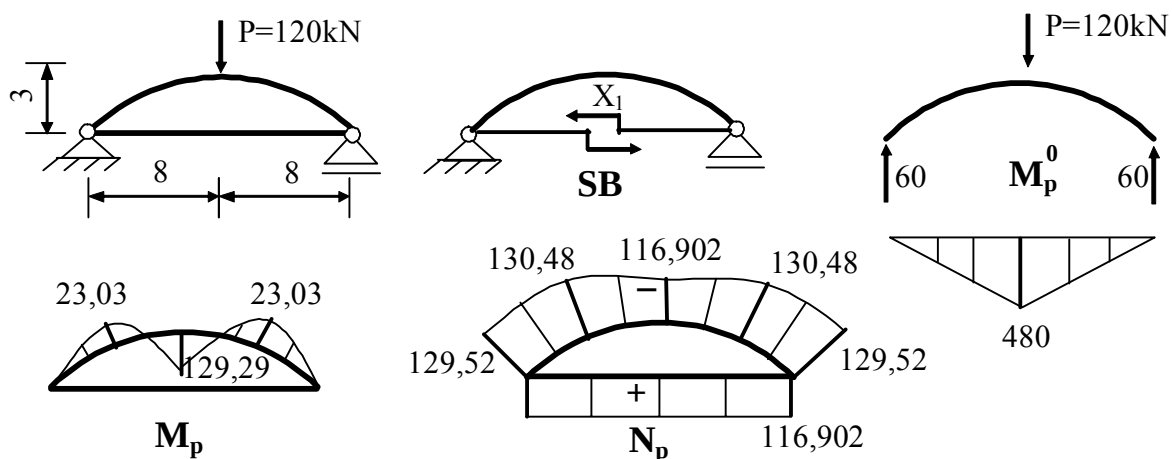
- secțiunea de la cheie: $\cos \varphi_c = 1$; $\sin \varphi_c = 0$

$$N_c = -X_1 \cos \varphi_c = -124,223 \text{ kN}$$

Cu aceste valori în figura 3.27 au fost trasate diagramele M_p și N_p .

EXEMPLUL 3.9. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță axială la arcul cu tirant din figura 3.28.

Caracteristicile secționale ale arcului sunt: modulul de elasticitate al arcului (beton) $E=300000 \text{ daN/cm}^2$, secțiunea transversală a arcului $b \times h = 40 \times 60 \text{ cm}^2$, modulul de elasticitate al tirantului (oțel) $E_t = 2100000 \text{ daN/cm}^2$, aria secțiunii transversale a tirantului $A_t = 34 \text{ cm}^2$.



- Fig.3.28 -

Arcul este același de la aplicația 3.8. În acest caz având tirant se modifică numai coeficientul necunoscutei, respectiv

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds + \int \frac{n_1^2}{EA} ds + \int \frac{n_t^2}{E_t A_t} dx$$

sau ținând seama de $m_1 = -y$, $n_1 = -\cos \varphi$, $n_t = +1$ rezultă

$$EI_0 \delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds + \int \frac{EI_0}{E_t A_t} 1^2 dx$$

Deoarece arcul este pleoștit, iar secțiunea transversală este constantă ($I_0=I$) rezultă

$$\int y^2 ds = 2 \int_0^{L/2} \left[\frac{4fx(L-x)}{L^2} \right]^2 dx = 76,80$$

$$\int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds = L \cdot i_0^2 = 0,48$$

$$\int \frac{EI_0}{E_t A_t} 1^2 dx = L \cdot i_t^2 = 16 \cdot \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 72 \cdot 10^{-4}}{2,1 \cdot 10^8 \cdot 34 \cdot 10^{-4}} = 4,84$$

$$EI_0 \Delta_{1p} = - \int y M_p^0 ds = -9600$$

Necunoscuta, efortul din tirant, este

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{9600}{76,80 + 0,48 + 4,84} = 116,902 \text{ kN}$$

Se constată că în cazul arcului cu tirant, efortul în tirant este mai mic decât reacțiunea orizontală a arcului dublu articulat, și aceasta deoarece tirantul este un element deformabil.

Momentele încovoietoare se determină cu relația $M_p = M_p^0 - yX_1$

- la cheie $M_c = 60 \cdot 8 - 3 \cdot 116,902 = 129,29 \text{ kNm}$

- la sfertul deschiderii $M_s = 60 \cdot 4 - \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot 116,902 = -23,03 \text{ kNm}$

Forțele axiale se determină cu relația $N_p = N_p^0 - X_1 \cos \varphi$

- la nașteri $N_1 = -\frac{P}{2} \sin \varphi_1 - X_1 \cos \varphi_1 = -129,52 \text{ kN}$

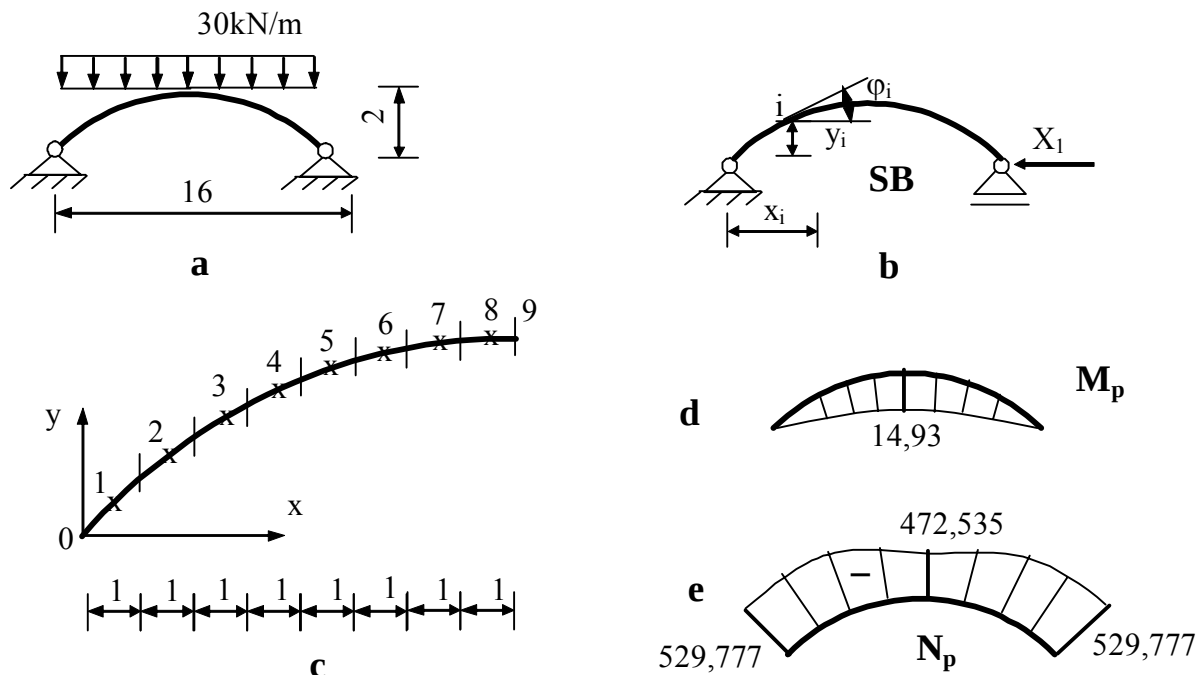
- la sfertul deschiderii $N_s = -\frac{P}{2} \sin \varphi_s - X_1 \cos \varphi_s = -130,48 \text{ kN}$

- la cheie $N_c = -X_1 = -116,902 \text{ kN}$

- în tirant $N_t = +X_1 = +116,902 \text{ kN}$

Diagramele de eforturi (moment încovoietor și forță axială) au fost trasate în figura 3.28. Se constată că, în comparație cu arcul dublu articulat, la arcul cu tirant momentul la cheie a crescut, iar momentul la sfertul deschiderii a scăzut.

EXEMPLUL 3.10 Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță axială la arcul dublu articulat din figura 3.29, a folosind metoda bolțarilor. Arcul este parabolic cu secțiune constantă ($b \times h = 40 \times 90 \text{ cm}^2$).



- Fig.3.29 -

Arcul este o singură dată static nedeterminat și se alege ca sistem de bază arcul simplu rezemat (fig.3.29,b). Deoarece arcul este încărcat simetric, calculul se va efectua pe jumătate de arc. În acest sens se vor folosi 8 bolțari având proiecția pe orizontală constantă, respectiv $\Delta s = 1 \text{ m}$ (fig.3.29,c).

În tabelul 3.3 se determină coordonatele centrelor de greutate ale celor 8 bolțari și a secțiunilor de la naștere și de la cheie precum și unghiurile formate de tangenta la curbă cu orizontala în aceste puncte.

Relațiile de calcul sunt:

$$y_i = \frac{4 \cdot f \cdot x_i \cdot (L - x_i)}{L^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot x_i \cdot (16 - x_i)}{16^2} = \frac{x_i}{2} - \frac{x_i^2}{32}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_i = x_i - \frac{x_i}{16}; \quad \sin \varphi_i = \frac{\operatorname{tg} \varphi_i}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_i}}; \quad \cos \varphi_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_i}}$$

Tabelul 3.3

Secțiune	x_i	y_i	$\operatorname{tg} \varphi_i$	$\sin \varphi_i$	$\cos \varphi_i$	M_p^0	N_p^0
0	0	0.000	0.500	0.447	0.894	0.000	-107.331
1	0.5	0.242	0.469	0.424	0.905	116.250	-95.498
2	1.5	0.680	0.406	0.376	0.926	326.250	-73.394
3	2.5	1.055	0.344	0.325	0.946	506.250	-53.638
4	3.5	1.367	0.281	0.271	0.963	656.250	-36.551
5	4.5	1.617	0.219	0.214	0.977	776.250	-22.438
6	5.5	1.805	0.156	0.154	0.988	866.250	-11.578
7	6.5	1.930	0.094	0.093	0.996	926.250	-4.200
8	7.5	1.992	0.031	0.031	1.000	956.250	-0.469
9	8	2.000	0.000	0.000	1.000	960.000	0.000

Momentele încovoietoare și a forțelor axiale în centrele de greutate ale bolțarilor precum și în secțiunile de la naștere și de la cheie pe sistemul de bază se determină cu relațiile de mai jos și sunt prezentate de asemenea în tabelul 3.3.

$$M_{pi}^0 = V_0 \cdot x_i - 30 \cdot x_i \cdot \frac{x_i}{2}$$

$$N_{pi}^0 = -(V_0 - 30 \cdot x_i) \cdot \sin \varphi_i$$

unde V_0 reprezintă reacțiunea verticală din secțiunea de la naștere ($V_0 = 30 \cdot 16 / 2 = 240 \text{ kN}$).

Expresia necunoscutei, în condiția $\Delta s = \text{ct.}$, $I = \text{ct.}$, este

$$X_1 = \frac{\sum \frac{I_0}{I} y M_p^0 \Delta s}{\sum \frac{I_0}{I} y^2 \Delta s + L \cdot i_0^2} = \frac{\sum y M_p^0}{\sum y^2 + \frac{L \cdot i_0^2}{\Delta s}}$$

Termenii din expresia necunoscutei sunt calculați în tabelul 3.4.

Tabelul 3.4

Bolțar	x_i	y_i	y_i^2	M_p^0	$y_i M_p^0$
1	0.5	0.242	0.059	116.250	28.154
2	1.5	0.680	0.462	326.250	221.748
3	2.5	1.055	1.112	506.250	533.936
4	3.5	1.367	1.869	656.250	897.217
5	4.5	1.617	2.615	776.250	1255.342
6	5.5	1.805	3.257	866.250	1563.311
7	6.5	1.930	3.724	926.250	1787.373
8	7.5	1.992	3.969	956.250	1905.029

Termenii din expresia necunoscutei se calculează pe arcul întreg, deoarece sistemul de bază este arcu simplu rezemat, respectiv

$$2\sum y M_p^0 = 2 \cdot 8192,109 = 16384,218$$

$$2\sum y^2 = 2 \cdot 17,067 = 34,133$$

$$\frac{L \cdot i_o^2}{\Delta s} = \frac{L \cdot h_o^2}{12 \cdot \Delta s} = \frac{16 \cdot 0.9^2}{12 \cdot 2} = 0,54$$

Necunoscuta X_1 este

$$X_1 = \frac{16384,218}{34,133 + 0,54} = 472,535 \text{ kN}$$

Eforturile finale au fost calculate cu relațiile

$$M_p = M_p^0 - y \cdot X_1$$

$$N_p = N_p^0 - X_1 \cdot \cos \varphi$$

sunt înscrise în tabelul 3.5 și sunt reprezentate în figura 3.29,d și e.

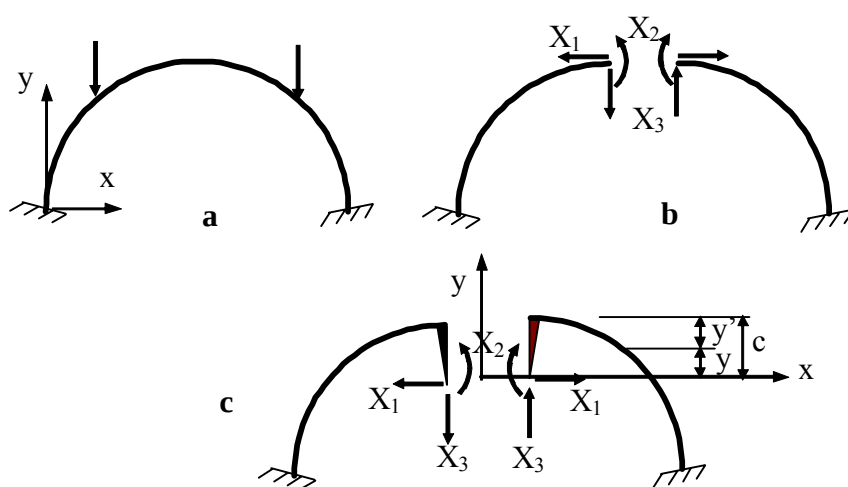
Tabelul 3.5

Sect.	y_i	M_p^0	$-y_i \cdot X_1$	M_p	N_p^0	$-X_1 \cdot \cos \varphi$	N_p
0	0.000	0.	0.	0.	-107.331	-422.446	-529.777
1	0.242	116.250	-114.442	1.808	-95.498	-427.644	-523.142
2	0.680	326.250	-321.176	5.074	-73.394	-437.567	-510.961
3	1.055	506.250	-498.377	7.873	-53.638	-447.018	-500.656
4	1.367	656.250	-646.044	10.206	-36.551	-455.051	-491.602
5	1.617	776.250	-764.178	12.072	-22.438	-461.667	-484.105
6	1.805	866.250	-852.778	13.472	-11.578	-466.865	-478.443
7	1.930	926.250	-911.845	14.405	-4.200	-470.645	-474.845
8	1.992	956.250	-941.378	14.872	-0.469	-472.535	-473.004
9	2.000	960.000	-945.070	14.930	0	-472.535	-472.535

3.3.3. Arcul dublu încastrat

Arcul dublu încastrat este de trei ori static nedeterminat. Calculul arcelor dublu încastrate se efectuează utilizând un procedeu specific de ortogonalizare a diagramelor unitare denumit procedeu transferării necunoscutelor în centrul elastic. În acest mod se poate realiza anularea coeficienților secundari din sistemul ecuațiilor de condiție. De notat că două diagrame se numesc ortogonale dacă rezultatul integrării lor este egal cu zero.

Fie arcul dublu încastrat din figura 3.30,a și sistemul de bază obținut prin secționarea arcului în secțiunea de la cheie (fig. 3.30,b).



- Fig. 3.30

Sistemul general de ecuații de condiție are forma:

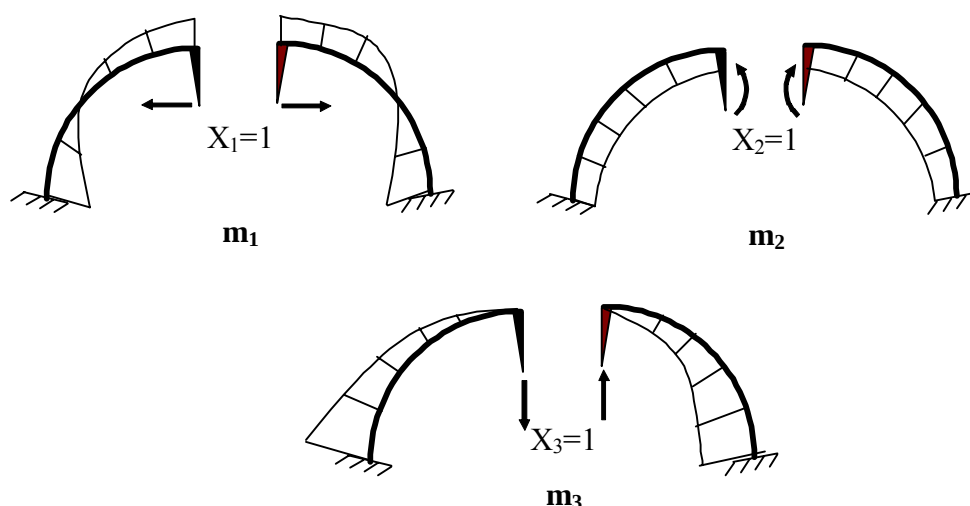
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

Deoarece necunoscutele X_1 și X_2 sunt simetrice, iar necunoscuta X_3 este antisimetrică rezultă că $\delta_{13}=\delta_{31}=\delta_{23}=\delta_{32}=0$. Datorită acestei proprietăți, diagramele m_1 și m_2 sunt ortogonale cu diagrama m_3 . Sistemul de ecuații se poate împărți în două sisteme

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

Aceași formă a sistemului de ecuații a fost întâlnită și în cazul cadrelor simetrice. Dacă încărcarea este simetrică atunci X_3 , iar dacă încărcarea este antisimetrică, $X_1=X_2=0$. Problema care se pune este ca diagramele simetrice m_1 și m_2 să fie ortogonalizate astfel încât $\delta_{12}=\delta_{21}=0$. Pentru aceasta se aplică procedeul transferării necunoscutelor în centrul elastic, adică se atașează de cele două bare curbe în axa de simetrie, câte o consolă de rigiditate infinită, iar necunoscutele se transferă în capătul acestor console (fig.3.30,c). Lungimea consolelor atașate, notată cu c , se determină din condiția ca diagramele m_1 și m_2 să fie ortogonale.

Diagramele unitare produse de necunoscutele transferate în centrul elastic sunt prezentate în figura 3.31.



- Fig. 3.31 -

Expresiile momentelor încovoietoare și ale forțelor axiale produse de cele trei necunoscute în secțiunea curentă a sistemul de bază sunt:

$$\begin{aligned} m_1 &= -y & m_2 &= 1 & m_3 &= x \\ n_1 &= -\cos \varphi & n_2 &= 0 & n_3 &= \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.63)$$

Cu aceste valori, expresia coeficientului δ_{12} devine:

$$EI_0 \delta_{12} = -\int \frac{I_0}{I} y ds = 0 \quad (3.64)$$

sau

$$\int \frac{I_0}{I} y ds = 0 \quad (3.65)$$

Exprimând ordonata secțiunii curente y în raport cu c se obține $y = c - y'$ unde y' se măsoară de la cheie.

Condiția (3.65) devine

$$\int \frac{I_0}{I} y ds = \int \frac{I_0}{I} c ds - \int \frac{I_0}{I} y' ds = 0 \quad (3.66)$$

de unde se obține lungimea c a consolelor atașate, respectiv distanța de la cheie la centrul elastic (originea sistemului de axe xoy)

$$c = \frac{\int \frac{I_0}{I} y' ds}{\int \frac{I_0}{I} ds} \quad (3.67)$$

În aceste condiții sistemul de ecuații (3.62) devine

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

Tinând seama de expresiile (3.63), coeficienții necunoscutelor și termenii liberi din sistemul de ecuații (3.68) capătă forma:

$$\begin{aligned} EI_0 \delta_{11} &= \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds \\ EI_0 \delta_{22} &= \int \frac{I_0}{I} ds \\ EI_0 \delta_{33} &= \int \frac{I_0}{I} x^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \sin^2 \varphi ds \\ EI_0 \Delta_{1p} &= \int \frac{I_0}{I} y M_p^0 ds + \int \frac{I_0}{A} N_p^0 \cos \varphi ds \\ EI_0 \Delta_{2p} &= \int \frac{I_0}{I} M_p^0 ds \\ EI_0 \Delta_{3p} &= \int \frac{I_0}{I} x M_p^0 ds + \int \frac{I_0}{A} N_p^0 \sin \varphi ds \end{aligned} \quad (3.69)$$

Admițând aproximațiile făcute la arcul dublu articulat și introducând și următoarele aproximații:

$$\int \frac{I_0}{A} \sin^2 \varphi ds = 0; \text{ și } \int \frac{I_0}{A} N_p^0 \sin \varphi ds = 0 \quad (3.70)$$

necunoscutele din sistemul de ecuații (3.68) capătă expresiile

$$X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} ds + l \cdot i_0^2}; \quad X_2 = -\frac{\int \frac{I_0}{I} M_p^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} ds}; \quad X_3 = -\frac{\int \frac{I_0}{I} x M_p^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} x^2 ds} \quad (3.71)$$

Dacă încărcarea exterioară este simetrică, atunci $X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$ și $X_3 = 0$, iar dacă încărcarea este antisimetrică, atunci $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, și $X_3 \neq 0$.

După determinarea necunoscutelor, eforturile din secțiunea curentă se calculează prin suprapunere de efecte astfel:

- în cazul încărcării simetrice

$$\begin{aligned} M_p &= M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 = M_p^0 - y X_1 + X_2 \\ N_p &= N_p^0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 = N_p^0 - X_1 \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.72)$$

- în cazul încărcării antisimetrice

$$\begin{aligned} M_p &= M_p^0 + m_3 X_3 = M_p^0 + x X_3 \\ N_p &= N_p^0 + n_3 X_3 = N_p^0 + X_3 \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.73)$$

Datorită dificultăților ce apar în calculul integralelor, se poate folosi însumarea numerică utilizând calculul prin bolțari.

Astfel, poziția centrului elastic este

$$c = \frac{\sum y' W}{\sum W} \quad (3.74)$$

iar expresiile necunoscutelor sunt:

$$X_1 = \frac{\sum y M_p^0 W}{\sum y^2 W + L \cdot i_0^2}; \quad X_2 = -\frac{\sum M_p^0 W}{\sum W}; \quad X_3 = \frac{\sum x M_p^0 W}{\sum x^2 W} \quad (3.75)$$

unde $W = \frac{I_0}{I} \Delta s$ reprezintă lungimea transformată a bolțarilor.

Efectul variației de temperatură. În cazul arcelor simetrice încărcate cu variație de temperatură simetrică ($\Delta t > 0$, $t_m > 0$) sistemul ecuațiilor de condiție are forma:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2t} = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

unde δ_{11} și δ_{22} au expresiile cunoscute iar termenii liberi sunt:

$$\Delta_{1t} = \alpha \int n_1 \cdot t_m \cdot ds + \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot m_1 \cdot ds = -\alpha \cdot t_m \cdot L - \alpha \cdot \int \frac{\Delta t}{h} \cdot y \cdot ds \quad (3.77)$$

$$\Delta_{2t} = \alpha \int n_2 \cdot t_m \cdot ds + \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot m_2 \cdot ds = \alpha \cdot \int \frac{\Delta t}{h} ds$$

Necunoscutele capătă forma:

$$X_1 = EI_0 \alpha \frac{\int \frac{\Delta t}{h} y ds + L \cdot t_m}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2}; \quad (3.78)$$

$$X_2 = -EI_0 \alpha \frac{\int \frac{\Delta t}{h} ds}{\int \frac{I_0}{I} ds}$$

Considerând cele două cazuri de încărcare particulare se obține:

a) Dacă arcul este supus unei variații de temperatură uniformă ($t_m \neq 0$, și $\Delta t = 0$) atunci din (3.78) rezultă

$$X_1 = EI_0 \alpha \frac{L \cdot t_m}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2}; \quad X_2 = 0 \quad (3.79)$$

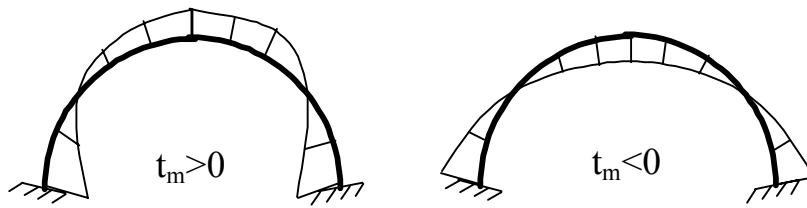
Pentru arcul cu secțiunea transversală constantă necunoscuta X_1 are următoarea expresie

$$X_1 = EI_0 \alpha \frac{L \cdot t_m}{\int y^2 ds + L \cdot i_0^2} \quad (3.80)$$

Momentul încovoietor într-o secțiune se calculează cu relația

$$M_t = m_1 \cdot X_1 = -y \cdot X_1 \quad (3.81)$$

În figura 3.32 se prezintă calitativ diagrama de moment încovoietor produsă de acțiunea temperaturii medii.



- Fig.3.32 -

b) Dacă arcul este supus numai unei variații de temperatură pentru care $t_m=0$, și $\Delta t \neq 0$, unde Δt este o încărcare simetrică, expresiile necunoscutelor sunt:

$$X_1 = EI_0 \alpha \frac{\int \frac{\Delta t}{h} y ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} = 0; \quad X_2 = -EI_0 \alpha \frac{\int \frac{\Delta t}{h} ds}{\int \frac{I_0}{I} ds} \quad (3.82)$$

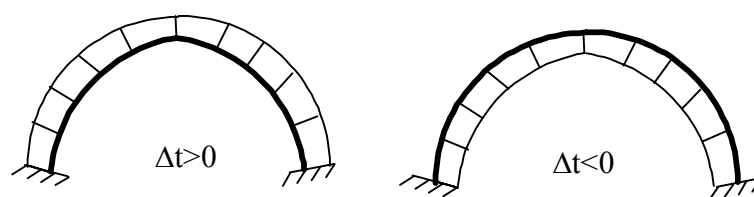
La arcele cu secțiune constantă, necunoscuta X_2 are expresia

$$X_2 = -EI_0 \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta t}{h} \quad (3.83)$$

Expresia momentului încovoietor devine:

$$M_t = m_2 \cdot X_2 = 1 \cdot X_2 = -EI_0 \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta t}{h} \quad (3.84)$$

Dacă fibra mai încălzită este la extrados atunci fibra întinsă este la intrados și invers (fig.3.33).



- Fig.3.33 -

Efectul cedărilor de reazeme. Pentru arcul dublu încastrat necunoscutele transferate în centrul elastic, au expresiile:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -\frac{\Delta_{1\Delta}}{\delta_{11}} = \frac{EI_0 \sum r_{k1} \Delta_k}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \\
 X_2 &= \frac{\Delta_{2\Delta}}{\delta_{22}} = \frac{EI_0 \sum r_{k2} \Delta_k}{\int \frac{I_0}{I} ds} \\
 X_3 &= \frac{\Delta_{3\Delta}}{\delta_{33}} = \frac{EI_0 \sum r_{k3} \Delta_k}{\int \frac{I_0}{I} x^2 ds}
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

unde Δ_k sunt cedările de reazeme, iar r_{ki} sunt reacțiunile de pe direcțiile cedărilor de reazeme din încărcarea succesivă a sistemului de bază cu necunoscutele $X_i=1$.

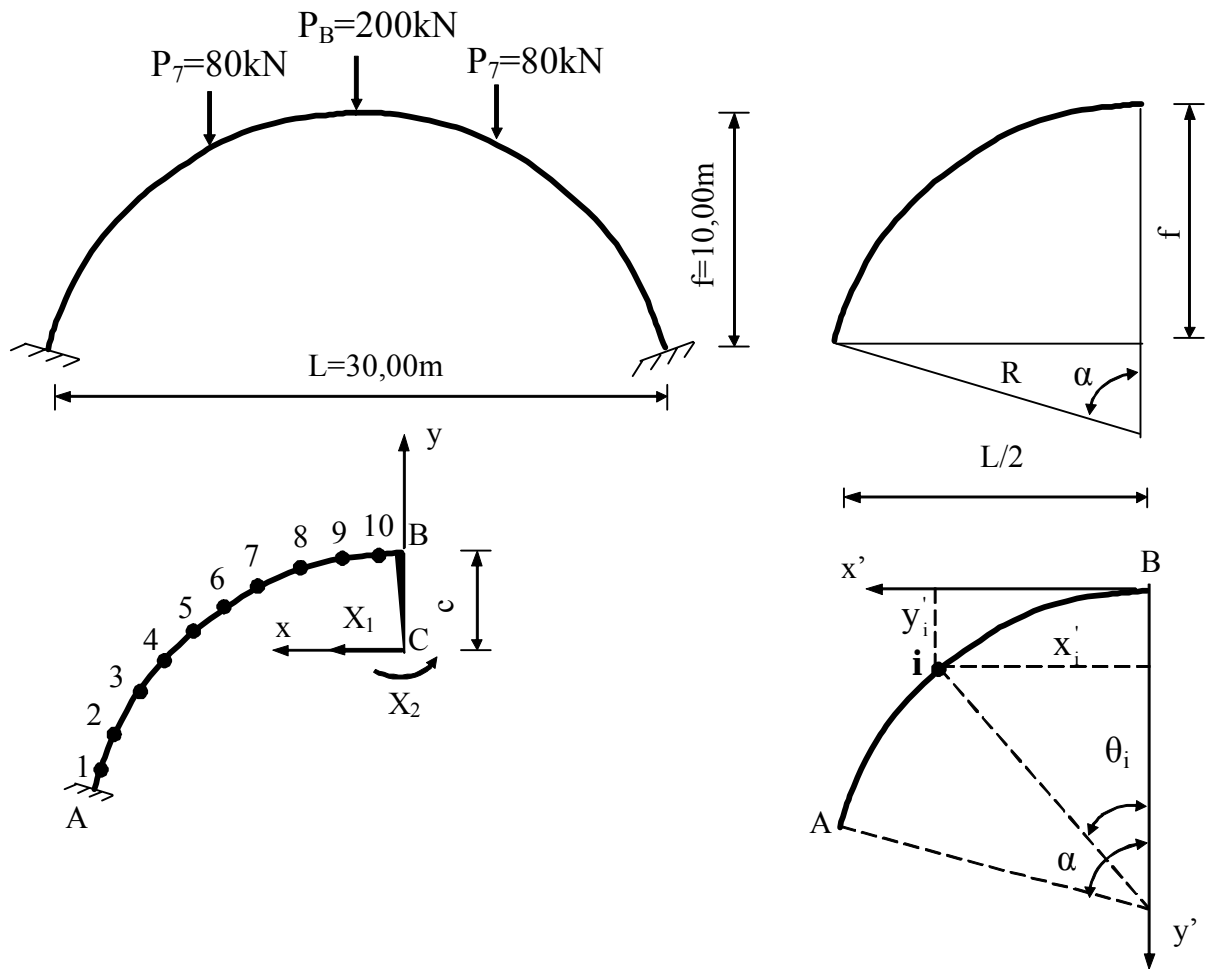
EXEMPLUL 3.11. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță axială la arcul dublu încastrat de formă circulară din figura 3.34 utilizând metoda bolțarilor. Arcul este realizat din beton armat având următoarele elemente geometrice:

- deschiderea $L=30m$;
- săgeata $f=10m$;
- secțiunea transversală constantă $b \times h=50 \times 90cm$.

Arcul fiind simetric și încărcat simetric se alege ca sistem de bază consola cu capăt liber în axa de simetrie. Calculul se va efectua pe semistructură, prin transferarea necunoscutelor în centrul elastic. Semiarcul se împarte în 10 bolțari de lungime egală.

Eforturile diferite de zero sunt X_1 și X_2 și au expresiile

$$X_1 = \frac{\sum y M_p^0 W}{\sum y^2 W + L \cdot i_0^2}; \quad X_2 = -\frac{\sum M_p^0 W}{\sum W}$$



- Fig.3.34 -

Calculul elementelor geometrice ale arcului. Cunoscând deschiderea și săgeata se determină raza arcului și unghiul la centru.

$$R^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (R - f)^2 \quad R = \frac{L^2}{8f} + \frac{f}{2} = 16,25\text{m}$$

$$\sin \alpha = \frac{L}{2R} = 0,923 \quad \alpha = 67,38^\circ$$

$$\text{Lungimea unui element este } \Delta s = \frac{n^0 \cdot \pi \cdot R}{180^0} = \frac{6,738^0 \cdot \pi \cdot 16,25}{180^0} = 1,911\text{m}$$

Coordonatele centrelor de greutate ale bolțarilor precum și ale secțiunilor A (la naștere) și B (la cheie) sunt date în tabelul 3.6. Relațiile de calcul pentru coordonatele centrelor de greutate sunt: $x'_i = R \sin \theta_i$ și $y'_i = R(1 - \cos \theta_i)$.

Tabelul 3.6

Secțiunea	θ_i	$\sin\theta_i$	$\cos\theta_i$	x_i'	y_i'
A	67.380	0.923	0.385	15.000	10.000
1	64.011	0.899	0.438	14.607	9.129
2	57.273	0.841	0.541	13.670	7.464
3	50.535	0.772	0.636	12.545	5.921
4	43.797	0.692	0.722	11.246	4.521
5	37.059	0.603	0.798	9.793	3.282
6	30.321	0.505	0.863	8.203	2.223
7	23.583	0.400	0.916	6.501	1.357
8	16.845	0.290	0.957	4.709	0.697
9	10.107	0.175	0.984	2.852	0.252
10	3.369	0.059	0.998	0.955	0.028
B	0	0	1	0	0

Secțiunea transversală a arcului fiind constantă, rezultă $I_0=I$ și $W = \frac{I_0}{I} \Delta s = \Delta s$, deci relația (3.73) pentru determinarea poziției centrului elastic (de coordonată c) se poate scrie sub forma

$$c = \frac{\sum y' W}{\sum W} = \frac{\sum y' \Delta s}{\sum \Delta s}$$

Calculul coordonatei centrului elastic “c”, coordonatele y ale centrelor de greutate ale bolțarilor, în sistemul de axe xCy ($y=c-y'$) precum și termenii yW și y^2W , necesari în calculul necunoscutelor este prezentat în tabelul 3.7.

Tabelul 3.7

Secțiunea	y'	W	$y'W$	y	y^2W
10	0.028	1.911	0.054	3.459	22.865
9	0.252	1.911	0.482	3.235	19.999
8	0.697	1.911	1.332	2.790	14.875
7	1.357	1.911	2.593	2.130	8.670
6	2.223	1.911	4.248	1.264	3.053
5	3.282	1.911	6.272	0.205	0.080
4	4.521	1.911	8.640	-1.034	2.043
3	5.921	1.911	11.315	-2.434	11.321
2	7.464	1.911	14.264	-3.977	30.225
1	9.129	1.911	17.446	-5.642	60.831

Din tabelul 3.7 rezultă:

$$\sum W = 19,11; \quad \sum y'W = 66,644; \quad c = \frac{\sum y'W}{\sum W} = \frac{66,644}{19,11} = 3,487\text{m}$$

Momentele încovoietoare M_p^0 și eforturile axiale N_p^0 pe sistemul de bază sunt calculate în tabelul 3.8. Forțele concentrate sunt aplicate simetric în secțiunile 7 și B. Pentru calculul pe semistruktură se ia $\frac{P_B}{2} = 100\text{kN}$.

Tabelul 3.8

Secțiunea	$M_i = M_{i+1} + (x'_{i+1} - x'_i) \cdot \sum P_{i+1}$	$\sum P_i$	$\sin\theta_i$	N_p^0
B	$M_B=0$	100	0	0
10	$M_{10} = 0 - 100 \cdot 0,955 = -95,5$	100	0,059	-5,90
9	$M_9 = -95,5 - 100 \cdot 1,897 = -285,2$	100	0,175	-17,50
8	$M_8 = -285,2 - 100 \cdot 1,857 = -470,9$	100	0,290	-29,00
7	$M_7 = -470,9 - 100 \cdot 1,792 = -650,1$	100	0,400	-40,00 -72,00
6	$M_6 = -650,1 - 180 \cdot 1,702 = -956,46$	180	0,505	-90,90
5	$M_5 = -956,46 - 180 \cdot 1,59 = -1242,66$	180	0,603	-108,54
4	$M_4 = -1242,66 - 180 \cdot 1,453 = -1504,2$	180	0,692	-124,56
3	$M_3 = -1504,2 - 180 \cdot 1,299 = -1738,02$	180	0,772	-138,96
2	$M_2 = -1738,02 - 180 \cdot 1,125 = -1940,52$	180	0,841	-151,38
1	$M_1 = -1940,52 - 180 \cdot 0,937 = -2109,18$	180	0,899	-161,82
A	$M_A = -2109,18 - 180 \cdot 0,393 = -2179,92$	180	0,923	-166,14

Expresiile necunoscutelor sunt

$$X_1 = \frac{\sum y M_p^0 W}{\sum y^2 W + L \cdot i_0^2}; \quad X_2 = -\frac{\sum M_p^0 W}{\sum W}$$

Din tabelul 3.7 rezultă

$$\sum W = 19,110; \quad \sum y^2 W = 173,964$$

Termenul $L \cdot i_0^2$ pe semistruktură are valoarea

$$\frac{1}{2} L \cdot i_0^2 = \frac{1}{2} 30,00 \cdot \frac{0,90^2}{12} = 1,013$$

Termenii care apar la numărător în expresiile necunoscutelor sunt calculați în tabelul 3.9.

Tabelul 3.9

Sectiunea	W	y	yW	M_p^0	$M_p^0 W$	$y M_p^0 W$
10	1.911	3.459	6.610	-95.500	-182.501	-631.269
9	1.911	3.235	6.182	-285.200	-545.017	-1763.131
8	1.911	2.790	5.332	-470.900	-899.890	-2510.693
7	1.911	2.130	4.070	-650.100	-1242.341	-2646.187
6	1.911	1.264	2.416	-956.460	-1827.795	-2310.333
5	1.911	0.205	0.392	-1242.660	-2374.723	-486.818
4	1.911	-1.034	-1.976	-1504.200	-2874.526	2972.260
3	1.911	-2.434	-4.651	-1738.020	-3321.356	8084.181
2	1.911	-3.977	-7.600	-1940.520	-3708.334	14748.043
1	1.911	-5.642	-10.782	-2109.180	-4030.643	22740.888

$$\sum M_p^0 W = -21007,126; \quad \sum y M_p^0 W = 38196,942$$

Cu aceste rezultate necunoscutele capătă valorile

$$X_1 = \frac{38196,942}{173,964 + 1,013} = 218,297 \text{ kN}; \quad X_2 = -\frac{-21007,126}{19,11} = 1099,274 \text{ kNm}$$

Eforturile finale calculate cu relațiile

$$M_p = M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 = M_p^0 - y X_1 + X_2$$

$$N_p = N_p^0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 = N_p^0 - X_1 \cos \varphi$$

sunt date în tabelul 3.10

Tabelul 3.10

Secțiunea	y	M_p^0	$-yX_1$	M_p	N_p^0	$\cos \theta_i$	$-X_1 \cos \theta_i$	N_p
B	3.487	0.000	-761.202	338.072	0.000	1.000	-218.297	-218.297
10	3.459	-95.500	-755.089	248.685	-5.900	0.998	-217.860	-223.760
9	3.235	-285.200	-706.191	107.883	-17.500	0.984	-214.804	-232.304
8	2.790	-470.900	-609.049	19.325	-29.000	0.957	-208.910	-237.910
7	2.130	-650.100	-464.973	-15.799	-40.000	0.916	-199.960	-239.960
					-72.000			-271.960
6	1.264	-956.460	-275.927	-133.113	-90.900	0.863	-188.390	-279.290
5	0.205	-1242.660	-44.751	-188.137	-108.540	0.798	-174.201	-282.741
4	-1.034	-1504.200	225.719	-179.207	-124.560	0.722	-157.610	-282.170
3	-2.434	-1738.020	531.335	-107.411	-138.960	0.636	-138.837	-277.797
2	-3.977	-1940.520	868.167	26.921	-151.380	0.541	-118.099	-269.479
1	-5.642	-2109.180	1231.632	221.726	-161.820	0.438	-95.614	-257.434
A	-6.513	-2179.920	1421.768	341.122	-166.140	0.385	-84.044	-250.184

CAPITOLUL IV

METODA DEPLASARILOR

4.1. Principii generale

Metoda deplasărilor este o metodă generală pentru calculul structurilor static nedeterminate alcătuite din bare: cadre, grinzi continue sau grinzi cu zăbrele având nodurile rigide. La aceste tipuri de structuri solicitarea dominantă este încovoierea și de aceea se poate accepta ipoteza simplificatoare conform căreia în urma deformării, lungimile barelor nu se modifică. Se obține astfel, după cum se va vedea, o reducere substanțială calculului.

Așa cum s-a arătat anterior, în calculul structurilor static nedeterminate este necesar să se utilizeze atât condiția de echilibru static cât și condiția de continuitate a deformatelor.

Starea de eforturi dintr-o bară a structurii poate fi determinată dacă se cunosc încărcările exterioare precum și deplasările secțiunilor de la capete - translații sau rotații. Deoarece încărcările exterioare sunt cunoscute, rezultă că este necesar să se determine deplasările secțiunilor de la capetele barelor – respectiv deplasările nodurilor structurii. Astfel, în metoda deplasărilor se aleg drept parametri liniar independenți deplasările posibile ale nodurilor. Drept urmare condiția de continuitate este satisfăcută pentru orice valori ale acestora, deoarece sunt respectate atât legăturile cât și continuitatea barelor. Situația reală de echilibru se realizează pentru acea serie de valori a parametrilor pentru care este satisfăcută concomitent și condiția de echilibru static.

4.1.1. Structuri cu noduri fixe. Structuri cu noduri deplasabile

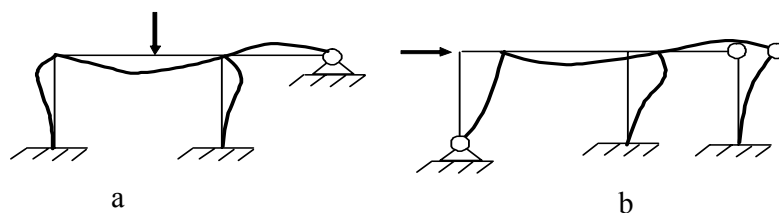
La structurile alcătuite din bare, nodurile pot fi:

- rigide, respectiv secțiunile din nod ale barelor care-l formează au aceeași rotație și aceeași translație;
- articulate, respectiv secțiunile din nod ale barelor care-l formează au aceeași translație, articulația permițând rotirea relativă a acestor secțiuni.

Tinând cont de posibilitățile de deplasare a nodurilor și de ipoteza invariabilității lungimilor barelor, structurile se clasifică în:

- **structuri cu noduri fixe** - care sub acțiunea încărcărilor se deformează numai prin rotirea nodurilor (fig.4.1,a);

- **structuri cu noduri deplasabile** - care sub acțiunea încărcărilor se deformează atât prin rotații cât și prin translații de noduri (fig.4.1,b).

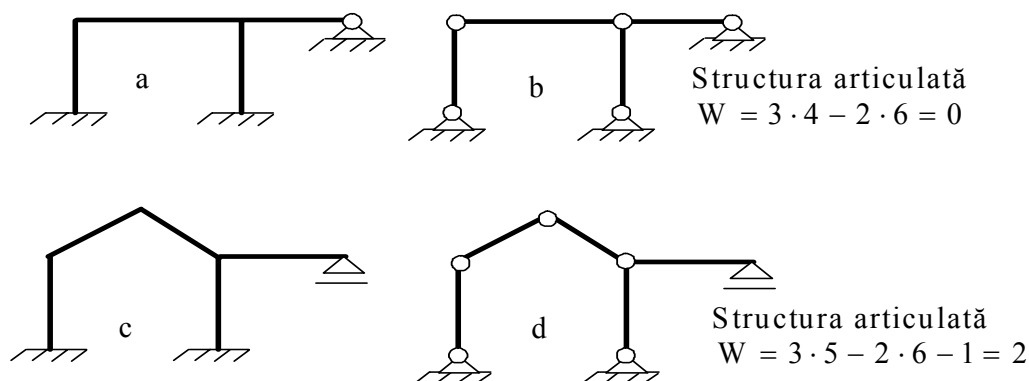


- Fig.4.1 -

Pentru a stabili dacă o structură este cu noduri fixe sau cu noduri deplasabile se procedează în modul următor:

- se transformă structura reală într-o structură articulată prin introducerea de articulații în toate nodurile rigide și în încastrările cu baza de susținere. Această structură este formată din două tipuri de bare: bare dublu articulate și bare articulate la un capăt și simplu rezemate la celălalt capăt (fig.4.2,b,d);
- structura articulată obținută se analizează din punct de vedere cinematic, respectiv se determină numărul gradelor de libertate cinematică pe care le are;

- dacă structura articulată nu are nici un grad de libertate cinematică, este invariabilă geometric, respectiv static determinată, atunci, structura reală este o structură cu noduri fixe (fig.4.2,a);
- dacă structura articulată are un număr oarecare de grade de libertate cinematică (este un mecanism), atunci structura reală este o structură cu noduri deplasabile, având un număr de grade de libertate elastică egal cu numărul gradelor de libertate cinematică ale structurii articulate (fig.4.2,c).



- Fig.4.2 -

Se știe că un corp în plan are trei grade de libertate, deci pentru o structură formată din B bare există 3B grade de libertate. Existența unei articulații simple suprimă două grade de libertate, iar a unui reazem simplu suprimă un singur grad de libertate. Deci, numărul total de grade de libertate suprimat prin intermediul acestor legături pentru întreaga structură este 2A+S, unde A reprezintă numărul de articulații simple interioare și de legătură cu baza de susținere, iar S numărul reazemelor simple. Dacă într-un nod articulat se întâlnesc mai multe bare, numărul de articulații simple este egal numărul de bare minus unu.

Diferența între numărul gradelor de libertate posibile ale tuturor barelor structurii și numărul gradelor de libertate suprimate prin legăturile barelor structurii articulate, reprezintă numărul gradelor de libertate cinematică, respectiv

$$W = 3B - 2A - S \quad (4.1)$$

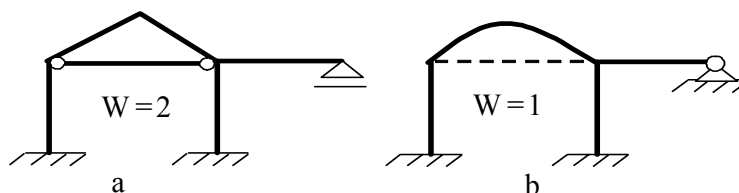
unde cu W s-a notat numărul gradelor de libertate cinematische.

Dacă $W \leq 0$ structura reală este cu noduri fixe, iar dacă $W > 0$ structura reală este cu noduri deplasabile.

În legătură cu stabilirea numărului gradelor de libertate elastică sunt necesare următoarele precizări:

- la *cadrele cu tirant* în calculul numărului de bare tirantul nu trebuie inclus, deoarece prezența sa în ansamblul structurii nu împiedică deplasarea pe direcția gradului de libertate, ci numai o limitează. Cadrul din figura 4.3,a are două grade de libertate;

- la *cadrele cu bare curbe*, trebuie ținut seama de faptul că o bară curbă introduce un grad de libertate în plus față de cazul barei drepte, deoarece intervine variația de distanță dintre capetele barei. Cadrul din figura 4.3,b are un grad de libertate. Dacă în locul barei curbe ar fi existat o bară dreaptă (reprezentată punctat în figură) cadrul ar fi fost cu noduri fixe.



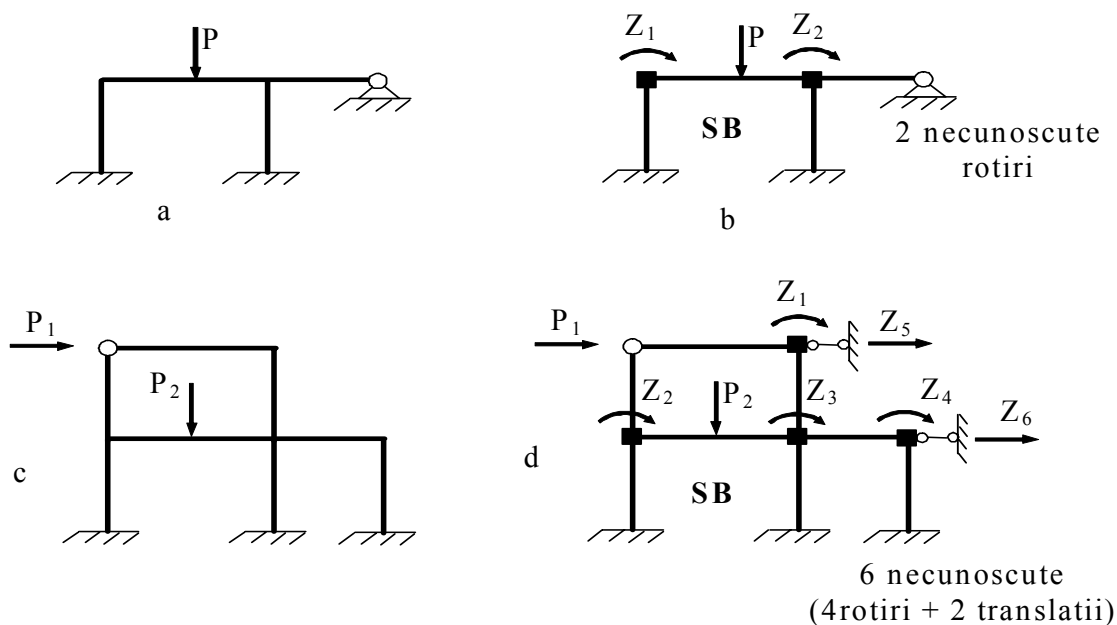
- Fig. 4.3 -

4.1.2 Sistem de bază. Ecuații de condiție.

În metoda deplasărilor, necunoscutele sunt deplasările nodurilor, respectiv rotirile nodurilor rigide și translațiile pe direcțiile gradelor de libertate elastică. Calculul structurilor prin metoda deplasărilor se conduce pe un sistem de bază. Acesta se obține prin introducerea de legături fictive care să împiedice deplasările posibile ale nodurilor - rotiri și translații.

Legăturile introduse sunt legături simple și blochează o singură deplasare. Pentru blocarea rotirii unui nod rigid se utilizează *blocajul de nod*, iar pentru blocarea translației pe direcția unui grad de libertate se utilizează *legătura de grad de libertate*. Blocajul de nod este o legătură simplă care suprimă rotirea nodului, dar lasă liberă translația acesteia. Echivalentul mecanic al unui blocaj de nod este o reacțiune moment. Legătura de grad de libertate este o legătură simplă care suprimă translația nodului și lasă liberă rotirea acesteia. Echivalentul mecanic al unei legături de grad de libertate este o reacțiune forță.

La cadrele cu noduri fixe, singura posibilitate de deplasare a nodurilor este rotirea. Sistemul de bază se obține prin introducerea în fiecare nod rigid a unei legături simple numită blocaj de nod. Un exemplu îl reprezintă sistemul de bază din figura 4.4,b obținut prin introducerea a două blocaje în nodurile 1 și 2 ale cadrului din figura 4.4,a.



- Fig. 4.4 -

În cazul cadrelor cu noduri deplasabile, posibilitățile de deplasare ale nodurilor sunt rotirea și translația. Sistemul de bază se obține blocând rotirile nodurilor rigide, prin introducerea de blocaje de nod, și translațiile pe direcțiile

gradelor de libertate elastice, prin introducerea de legături de grad de libertate. Legătura de grad de libertate este materializată printr-un pendul simplu care împiedică deplasarea tuturor nodurilor antrenate în deplasarea pe direcția gradului de libertate considerat, dar lasă liberă posibilitatea de rotire a nodurilor.

În figura 4.4,d este prezentat sistemul de bază pentru cadrul cu noduri deplasabile din figura 4.4,c obținut prin introducerea a trei blocaje de nod și a două legături de grad de libertate.

Sistemul de bază astfel obținut, diferă de structura reală prin faptul că deplasările nodurilor sunt împiedicate. De asemenea, se observă că sistemul de bază este încărcat cu forțele exterioare date și cu necunoscutele deplasări ale nodurilor - rotiri sau translații - notate în acest caz cu Z_i .

Sistemul de bază, în metoda deplasărilor, are următoarele caracteristici:

- este unic,
- este format din două tipuri de bare: bare dublu încastrate și bare încastrate la o extremitate și articulate la cealaltă,
- este multiplu static nedeterminat comparativ cu structura reală, deoarece au fost introduse legături suplimentare.

Sub acțiunea forțelor exterioare și a deplasărilor pe direcția necunoscutelor în legăturile suplimentare vor apărea reacțiuni. Reacțiunea totală din legătura suplimentară i se determină prin suprapunere de efecte și are expresia:

$$R_i = r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{ii}Z_i + \dots + r_{in}Z_n + R_{ip} \quad (4.2)$$

unde:

R_{ip} reprezintă reacțiunea din legătura suplimentară i când sistemul de bază este încărcat numai cu forțele exterioare;

r_{ij} reprezintă reacțiunea din legătura suplimentară i când sistemul de bază este încărcat numai cu deplasarea $Z_j=1$;

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ - sunt deplasările necunoscute ale nodurilor - rotiri și translații,

Din încărcarea cu forțe sau cu deplasări pe direcțiile necunoscutelor, condiția de compatibilitate a deformatelor este respectată în sensul că oricare ar fi această deformată ea respectă natura legăturilor structurii reale.

Condiția suplimentară care trebuie să se impună pentru a se obține deformată structurii reale este condiția de echilibru static. Aceasta se obține impunând condiția ca reacțiunile totale din legăturile suplimentare să fie nule, deci:

$$R_1 = 0, R_2 = 0, \dots, R_n = 0 \quad (4.3)$$

sau sub formă dezvoltată:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} = 0 \\ \vdots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (4.4) se obțin deplasările nodurilor, cu ajutorul cărora se determină eforturile finale.

Momentul încovoietor într-o secțiune curentă se determină prin suprapunere de efecte, astfel:

$$M_p = M_p^0 + m_1 \cdot Z_1 + m_2 \cdot Z_2 + \dots + m_n \cdot Z_n \quad (4.5)$$

unde

- M_p^0 reprezintă momentul încovoietor produs de forțele exterioare pe sistemul de bază în secțiunea considerată,

- m_i reprezintă momentul încovoietor produs în aceeași secțiune prin încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta $Z_i=1$.

După trasarea diagramei de moment încovoietor este necesar să se facă verificarea rezultatelor obținute. Verificarea eficientă a calculului prin metoda deplasărilor este verificarea condiției de echilibru static al structurii în ansamblu, sau a unor părți – nod sau nivel.

Pentru determinarea forțelor tăietoare și a forțelor axiale se parcurg aceleași etape prezentate la metoda eforturilor.

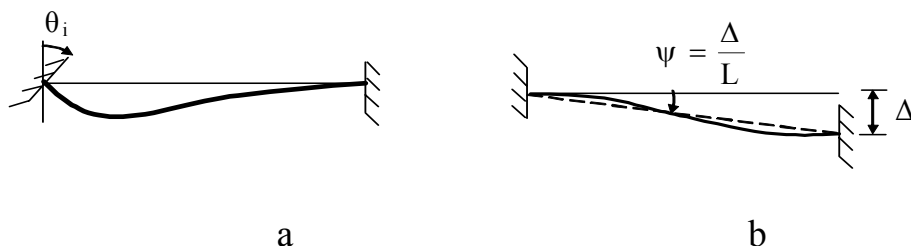
4.1.3. Convenție de semne pentru rotiri și momente încovoietoare

În metoda deplasărilor necunoscutele sunt rotiri și translații de noduri (fig.4.5,a,b). Se poate realiza o sistematizare a calculului structurilor deoarece sistemul de bază este unic și format din bare tip (dublu încastrate sau încastrat – articulate) și supuse unor încărcări tip – forțe și deplasări ale nodurilor. În acest sens este necesar să se introducă o convenție de semne pentru deplasări și eforturi.

Necunoscutele translații de nod pot fi privite ca necunoscute rotiri de bare (linia reazemelor s-a rotit cu unghiul $\psi_{ij} = \frac{\Delta}{L_{ij}}$). În felul acesta toate necunoscutele sunt rotiri.

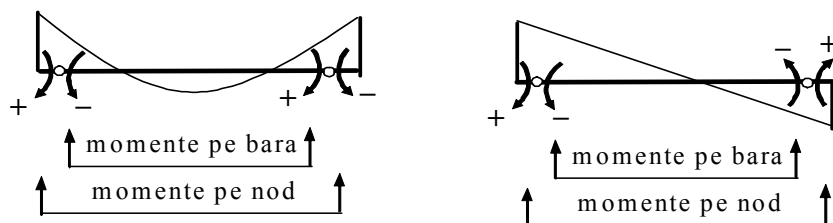
În ceea ce privește eforturile, deoarece structurile în formă de cadre sunt supuse în principal la încovoiere, interesează în primul rând momentele încovoietoare de la capetele barelor.

În concluzie se lucrează cu rotații și cu momente încovoietoare de capăt. Convenția de semne este următoarea: *se consideră pozitive rotațiile și momentele încovoietoare de capăt care au sens orar.*



- Fig.4.5 -

Pentru exemplificarea convenției de semne a momentelor încovoietoare se consideră diagramele din figura 4.6, unde au fost puse în evidență momentele încovoietoare din secțiunile de capăt. În calculul practic este necesar să se specifice cu care dintre cele două momente încovoietoare se lucrează (pe bară sau pe nod).



- Fig. 4.6 -

4.1.4. Relații între eforturi și încărcări la barele sistemului de bază

Tinând cont de existența celor două categorii de structuri, barele sistemului de bază pot avea următoarele încărcări:

- la structurile cu noduri fixe, barele pot fi încărcate cu forțe exterioare și cu rotații ale secțiunilor de la capetele barelor,
- la structurile cu noduri deplasabile, barele pot fi încărcate cu forțele exterioare, cu rotații ale secțiunilor de capăt și cu rotirea liniei reazemelor produsă de translația secțiunilor de la capăt.

Efectul încărcării cu forțe este cunoscut din capitolul precedent. Expresiile momentelor de încastrare perfectă sunt cuprinse în tabelul 3.1.

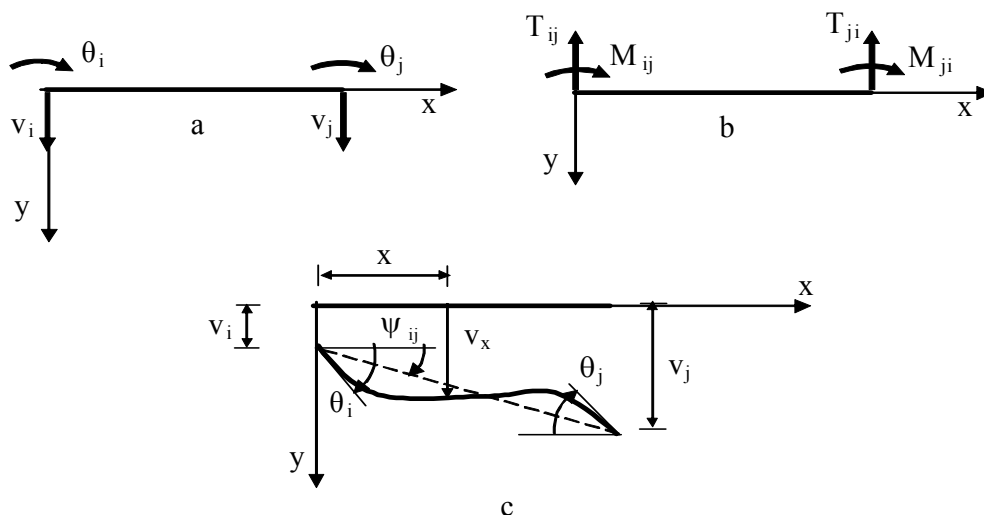
Efectul deplasărilor nodurilor poate fi evaluat prin mai multe metode, respectiv:

- prin metode energetice;
- utilizând ecuația diferențială a fibrei medii deformate cunoscută din Rezistența Materialelor;
- rezolvarea grinzilor static nedeterminate cu o singură deschidere la acțiunea cedărilor de reazeme (vezi exemplul 3.6).

În continuare va fi prezentat efectul deplasărilor nodurilor utilizând ecuația fibrei medii deformate cunoscută din Rezistența Materialelor.

4.1.4.1. Cazul barei dublu încastrate

Fie o bară dublu încastrată, la care s-au pus în evidență deplasările nodurilor (rotiri și translații) și eforturile din aceste secțiuni (fig. 4.6,a și b) în convenția de semne din Rezistența Materialelor. În figura 4.6,c a fost reprezentată poziția inițială și poziția finală deformată a barei.



- Fig. 4.7 -

Ecuția fibrei medii deformată, din Rezistența Materialelor este:

$$\frac{d^2 v_x}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} \quad (4.6)$$

unde v_x reprezintă deplasarea unui punct de abscisă x , E reprezintă modulul de elasticitate longitudinal, I momentul de inerție al secțiunii transversale, iar M_x momentul încovoietor în secțiunea curentă x .

Deoarece bara este încărcată numai la capete rezultă că momentul încovoietor trebuie să fie cu variație liniară, iar forța tăietoare să fie constantă. În consecință, deplasarea unui punct de abscisă x se alege sub forma unui polinom de gradul trei, respectiv

$$v_x = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (4.7)$$

Tinând cont de expresia (4.7), relația (4.6) devine

$$M_x = -EI \cdot \frac{d^2 v_x}{dx^2} = -EI \cdot (2a_2 + 6a_3 x) \quad (4.8)$$

Expresiile constantelor din (4.7) se determină din condițiile de capăt:

- pentru $x=0$

$$\begin{aligned} v_x &= v_i \\ \frac{dv_x}{dx} &= \theta_i \end{aligned} \quad (4.9)$$

- pentru $x=L$

$$\begin{aligned} v_x &= v_j \\ \frac{dv_x}{dx} &= \theta_j \end{aligned} \quad (4.10)$$

Deplasarea v_x are expresia (4.7), iar rotirea expresia (4.11)

$$\theta_x = \frac{dv_x}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \quad (4.11)$$

Introducând condițiile (4.9) și (4.10) în (4.7) și (4.11), rezultă următoarele expresii ale constantelor:

- pentru $x=0$ $a = v_i$ și $a_1 = \theta_i$

$$\text{- pentru } x=L \quad \begin{cases} v_j = v_i + \theta_i L + a_2 L^2 + a_3 L^3 \\ \theta_j = \theta_i + 2a_2 L + 3a_3 L^2 \end{cases} \quad (4.12)$$

de unde rezultă

$$a_2 = \frac{3(v_j - v_i) - (2\theta_i + \theta_j) \cdot L}{L^2} \quad (4.13)$$

$$a_3 = \frac{2(v_i - v_j) + (\theta_i + \theta_j) \cdot L}{L^3}$$

Cu aceste expresii ale constantelor, relația (4.7) devine

$$v_x = \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right) \cdot v_i + \left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right) \cdot L\theta_i + \left(3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}\right) \cdot v_j - \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3}\right) \cdot L\theta_j \quad (4.14)$$

Expresia momentului încovoietor devine:

$$M_x = -EI \cdot \left[6\left(2\frac{x}{L^3} - \frac{1}{L^2}\right)v_i - 2\left(\frac{2}{L} - 3\frac{x}{L^2}\right)\theta_i + 6\left(\frac{1}{L^2} - 2\frac{x}{L^3}\right)v_j - 2\left(\frac{1}{L} - 3\frac{x}{L^2}\right)\theta_j \right] \quad (4.15)$$

Tinând cont de relația diferențială

$$\frac{dM_x}{dx} = T_x \quad (4.16)$$

expresia forței tăietoare este:

$$T_x = -EI \cdot \left[\frac{12}{L^3}v_i + \frac{6}{L^2}\theta_i - \frac{12}{L^3}v_j + \frac{6}{L^2}\theta_j \right] \quad (4.17)$$

Eforturile la capetele barei sunt:
pentru $x=0$

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -\frac{12EI}{L^3}v_i - \frac{6EI}{L^2}\theta_i + \frac{12EI}{L^3}v_j - \frac{6EI}{L^2}\theta_j \\ M_{ij} &= \frac{6EI}{L^2}v_i + \frac{4EI}{L}\theta_i - \frac{6EI}{L^2}v_j + \frac{2EI}{L}\theta_j \end{aligned} \quad (4.18)$$

pentru $x=L$

$$\begin{aligned} T_{ji} &= -\frac{12EI}{L^3}v_i - \frac{6EI}{L^2}\theta_i + \frac{12EI}{L^3}v_j - \frac{6EI}{L^2}\theta_j \\ M_{ji} &= -\frac{6EI}{L^2}v_i - \frac{2EI}{L}\theta_i + \frac{6EI}{L^2}v_j - \frac{4EI}{L}\theta_j \end{aligned} \quad (4.19)$$

Prin particularizarea relațiilor (4.18) și (4.19) și notând cu $i_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}}$ rigiditatea practică a barei ij , expresiile momentelor încovoietoare și a forțelor tăietoare de la capetele barei, funcție de o singură deplasare diferită de zero, sunt:

$$\begin{aligned} \text{a) } \theta_i \neq 0 \quad v_i = v_j = \theta_j = 0 \\ M_{ij} = 4i_{ij}\theta_i \quad \text{și} \quad M_{ji} = -2i_{ij}\theta_i; \\ T_{ij} = T_{ji} = -\frac{6i_{ij}}{L}\theta_i \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \theta_j \neq 0 \quad v_i = v_j = \theta_i = 0 \\ M_{ij} = 2i_{ij}\theta_j \quad \text{și} \quad M_{ji} = -4i_{ij}\theta_j \\ T_{ij} = T_{ji} = -\frac{6i_{ij}}{L}\theta_j \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\text{c) } v_j - v_i \neq 0 \quad \theta_i = \theta_j = 0$$

$$M_{ij} = -6i_{ij}\psi_{ij} \quad \text{și} \quad M_{ji} = 6i_{ij}\psi_{ij} \quad (4.22)$$

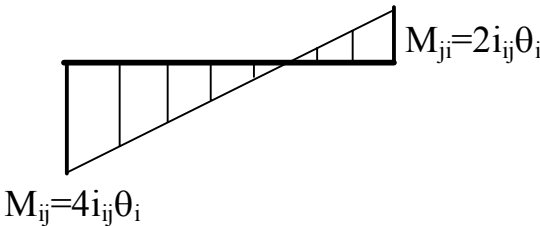
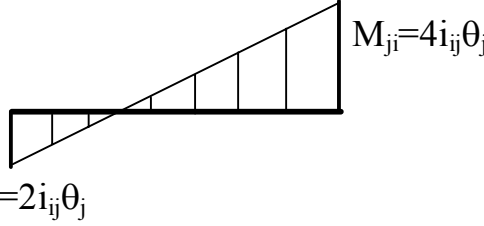
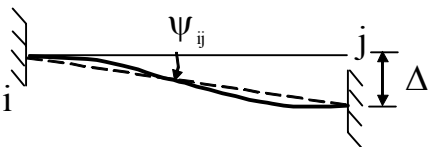
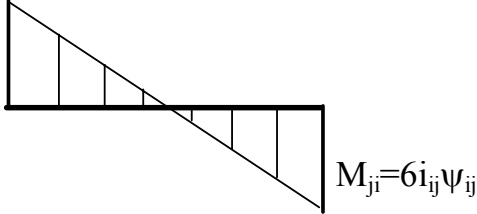
$$T_{ij} = T_{ji} = \frac{12i_{ij}}{L} \cdot \psi_{ij}$$

unde $\psi_{ij} = \frac{v_j - v_i}{L}$.

De remarcat faptul că semnele eforturilor sunt în concordanță cu convenția de semne din Rezistența Materialelor (momentul încovoietor este pozitiv dacă întinde fibra inferioară, iar forța tăietoare este pozitivă dacă tinde să rotească secțiunea în sensul acelor de ceasornic).

Diagramele de momente încovoietoare sunt prezentate în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1

	 $M_{ij} = 4i_{ij}\theta_i$ $M_{ji} = 2i_{ij}\theta_i$
	 $M_{ji} = 4i_{ij}\theta_j$ $M_{ij} = 2i_{ij}\theta_j$
	 $M_{ij} = 6i_{ij}\psi_{ij}$ $M_{ji} = 6i_{ij}\psi_{ij}$

4.1.4.2. Cazul barei încastrată - articulată

În cazul barei încastrată-articulată, capătul k este articulată, deci momentul încovoietor este nul. Pornind de la bara dublu încastrată se ajunge la cazul barei încastrată-articulată prin condiția $M_{ji}=0$ (4.19).

Din această condiție se determină θ_j , respectiv

$$\theta_j = -\frac{3}{2L} v_i - \frac{1}{2} \theta_i + \frac{3}{2L} v_j \quad (4.23)$$

care introdusă în M_{ij} (4.18) conduce la

$$M_{ik} = \frac{3EI}{L^2} v_i + \frac{3EI}{L} \theta_i - \frac{3EI}{L^2} v_j \quad (4.24)$$

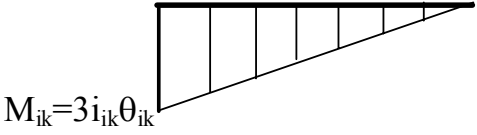
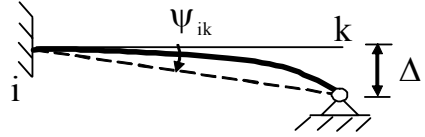
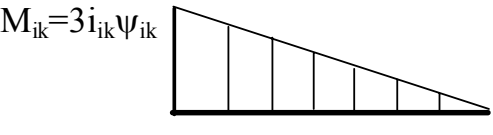
Particularizările conduc la

$$\begin{aligned} \text{a) } \theta_i \neq 0 \quad v_i = v_j = 0 \\ M_{ik} = 3i_{ik} \theta_i \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } v_i - v_j \neq 0 \quad \theta_i = 0 \\ M_{ik} = -3i_{ik} \psi_{ik} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Diagramele de eforturi sunt prezentate în tabelul 4.2.

Tabelul 4.2

	 $M_{ik} = 3i_{ik} \theta_{ik}$
	 $M_{ik} = 3i_{ik} \psi_{ik}$

Expresiile momentelor la capetele barelor (momente pe nod) în cazul celor două tipuri de structuri, momente produse de toate încărcările posibile - forțe exterioare, rotații de nod, translații de nod – în convenția de semne prezentată în paragraful anterior sunt:

- structuri cu noduri fixe

- bara dublu încastrată

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \mathbf{M}_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j \\ M_{ji} &= \mathbf{M}_{ji} - 2i_{ij}\theta_i - 4i_{ij}\theta_j \end{aligned} \quad (4.27)$$

unde momentele de încastrare perfectă $\mathbf{M}_{ij}$ și $\mathbf{M}_{ji}$ produse de forțe își conțin semnul.

- bara încastrat - articulată

$$M_{ik} = \mathbf{M}_{ik} - 3i_{ik}\theta_i \quad (4.28)$$

- structuri cu noduri deplasabile

- bara dublu încastrată

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \mathbf{M}_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j + 6i_{ij}\psi_{ij} \\ M_{ji} &= \mathbf{M}_{ji} - 2i_{ij}\theta_i - 4i_{ij}\theta_j + 6i_{ij}\psi_{ij} \end{aligned} \quad (4.29)$$

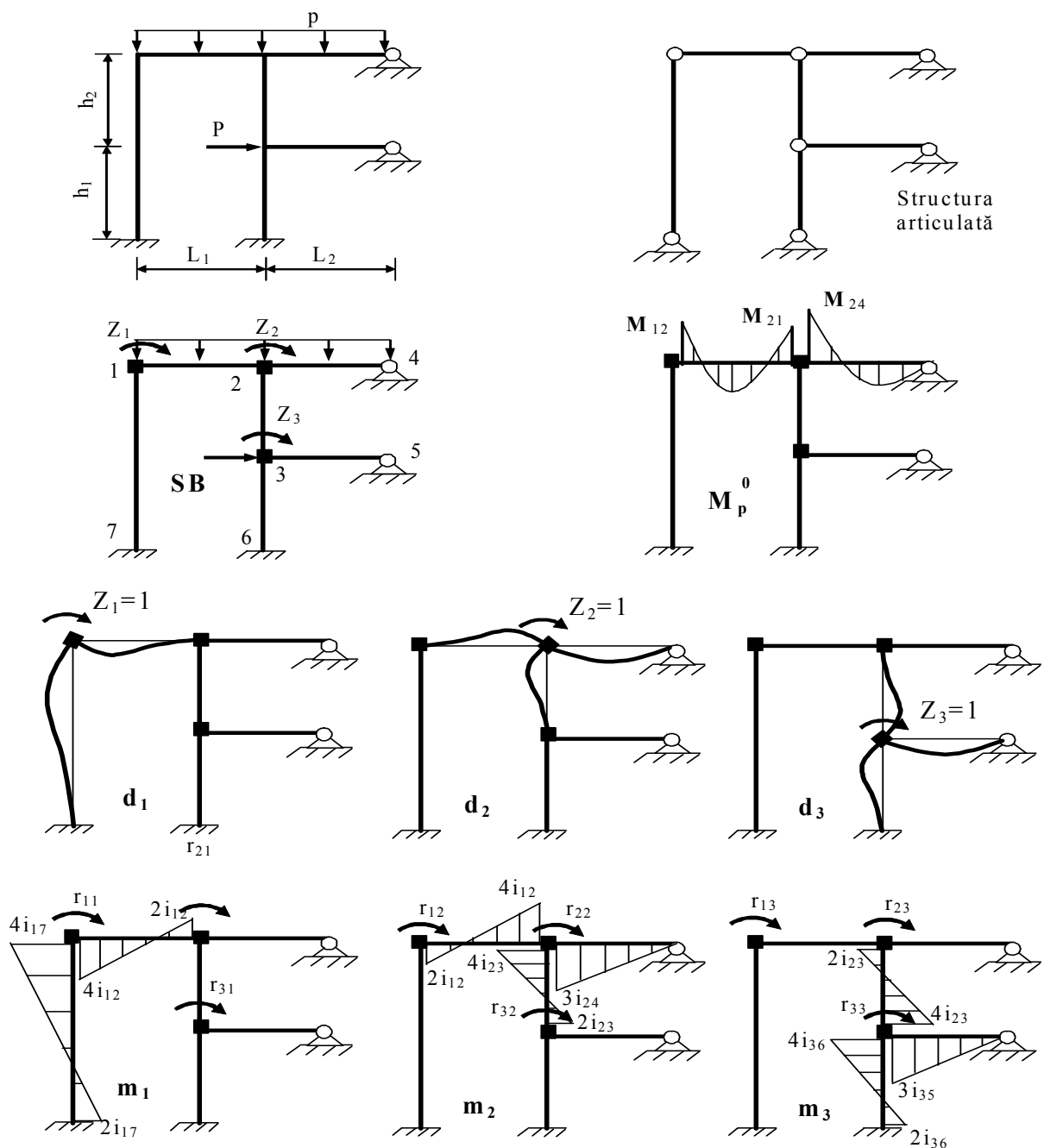
- bara încastrat - articulată

$$M_{ik} = \mathbf{M}_{ik} - 3i_{ij}\theta_i + 3i_{ik}\psi_{ik} \quad (4.30)$$

4.2. Structuri cu noduri fixe

Structurile cu noduri fixe sunt acele structuri care sub acțiunea încărcărilor exterioare se deformează prin rotirea nodurilor rigide. Deci, numărul de necunoscute este egal cu numărul nodurilor rigide pe care le are structura.

Pentru a analiza modul de rezolvare a unei structuri cu noduri fixe se consideră structura din figura 4.8.



- Fig.4.8 -

La început se stabilește categoria din care face parte structura, respectiv, structura este cu noduri fixe sau cu noduri deplasabile. Pentru aceasta se analizează din punct de vedere cinematic structura articulată, structură obținută din structura reală prin introducerea de articulații simple în nodurile rigide și în încastrările cu baza de susținere.

Pentru cazul de față se obține

$$W = 3B - 2A - S = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 9 - 0 = 0$$

deci, structura articulată nu are nici un grad de libertate cinematică, iar structura reală este o structură cu noduri fixe.

În continuare se trece la sistemul de bază al metodei deplasărilor. Acesta se obține prin introducerea de blocaje de nod în toate nodurile rigide ale structurii. Sistemul de bază astfel obținut este încărcat cu forțele exterioare date și cu necunoscutele, care în cazul de față sunt rotirile nodurilor rigide, trei la număr.

Dintre cele două condiții generale, de echilibru static și de compatibilitate a deformatelor cu legăturile, aceasta din urmă este respectată de sistemul de bază, indiferent de natura încărcărilor (forțe exterioare sau rotiri ale nodurilor rigide). Echilibrul static al sistemului de bază încărcat cu forțele exterioare și cu necunoscutele rotiri se exprimă prin impunerea condiției ca reacțiunile totale din blocajele de nod să fie nule, deoarece aceste blocaje în realitate nu există.

Astfel se obține sistemul ecuațiilor de condiție din metoda deplasărilor:

$$R_1 = 0, R_2 = 0, R_3 = 0$$

sau sub formă dezvoltată:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$

În sistemul ecuațiilor de condiție coeficienții necunoscutelor sunt reacțiuni unitare, ce apar în legăturile suplimentare când sistemul de bază este încărcat cu o deplasare egală cu unitatea.

Astfel o reacțiune de forma r_{ii} reprezintă reacțiunea ce apare în legătura suplimentară i când sistemul de bază este încărcat numai cu rotirea $Z_i=1$. Reacțiunile r_{ii} au totdeauna valori pozitive.

O reacțiune de forma r_{ij} reprezintă reacțiunea ce apare în legătura suplimentară i când sistemul de bază este încărcat numai cu rotirea $Z_j=1$. Reacțiunile r_{ij} pot avea valori pozitive, negative sau nule. Reacțiunile r_{ij} satisfac condiția de reciprocitate, respectiv $r_{ij}=r_{ji}$.

Termenii liberi sunt reacțiuni care apar în legăturile suplimentare produse de acțiunea forțelor exterioare pe sistemul de bază, Astfel reacțiunea R_{ip} reprezintă reacțiunea ce apare în legătura suplimentară i când sistemul de bază

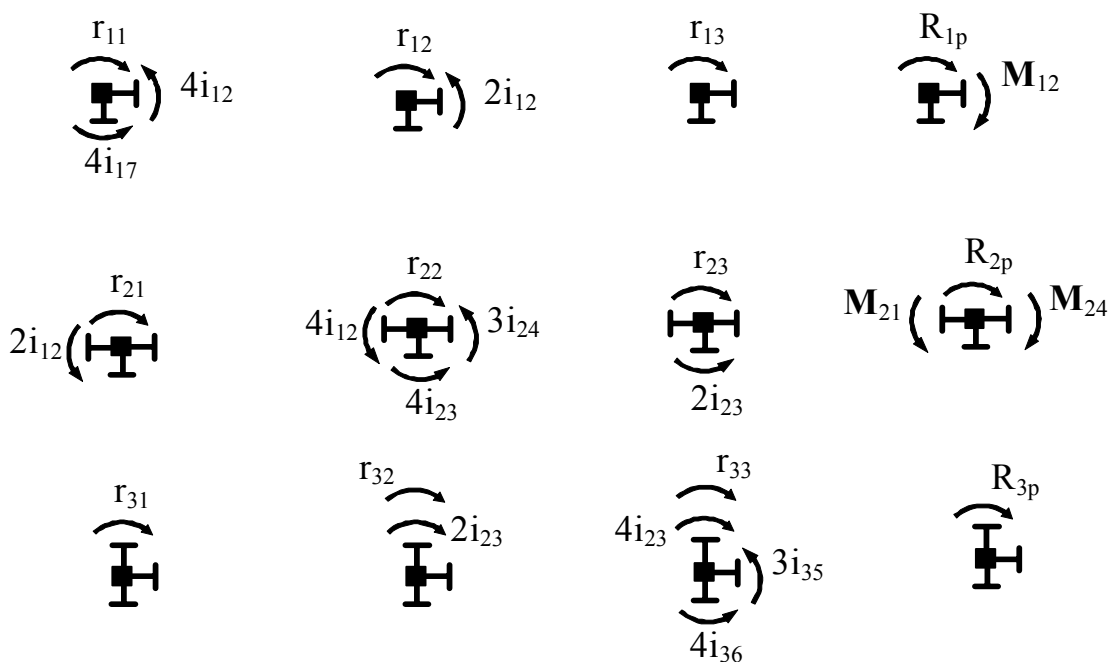
este încărcat cu forțele exterioare. Termenii liberi pot fi pozitivi, negativi sau nuli.

Prin încărcarea succesivă a sistemului de bază cu forțele date și cu deplasările $Z_1=1$, $Z_2=1$ și $Z_3=1$ se obțin diagramele de momente încovoietoare M_p^0 , m_1 , m_2 și m_3 (fig. 4.8). Pentru a trasa cu ușurință diagramele unitare este indicat să se deseneze în prealabil forma deformată a sistemului de bază (d_1 , d_2 , respectiv d_3), astfel stabilindu-se fibra întinsă prin rotirea nodului rigid.

Pentru calculul momentelor încovoietoare produse de rotirile nodurile se calculează rigiditățile practice ale barelor, respectiv $i_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}}$.

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi ce apar în sistemul ecuațiilor de condiție sunt reacțiuni moment și se calculează din condiția de echilibru static a nodului în care se află blocajul.

În figura 4.9 sunt prezentate toate situațiile din care se obțin reacțiunile din blocaje.



- Fig.4.9 -

Scriind ecuația de echilibru static sub forma $\sum M_i = 0$ se determină reacțiunile (valoare și semn). Se reaminte faptul că toate reacțiunile se desenează în sensul pozitiv în convenția de semne adoptată (vezi paragraful 4.1.3), respectiv sens orar.

$$\begin{aligned}
r_{11} - 4i_{12} - 4i_{17} &= 0; & r_{11} &= 4i_{12} + 4i_{17} \\
r_{12} - 2i_{12} &= 0; & r_{12} &= 2i_{12} \\
r_{13} &= 0; \\
R_{1p} + M_{12} &= 0; & R_{1p} &= -M_{12} \\
r_{21} - 2i_{12} &= 0; & r_{21} &= 2i_{12} \\
r_{22} - 4i_{12} - 4i_{23} - 3i_{24} &= 0; & r_{22} &= 4i_{12} + 4i_{23} + 3i_{24} \\
r_{23} - 2i_{23} &= 0; & r_{23} &= 2i_{23} \\
R_{1p} + M_{21} - M_{24} &= 0; & R_{1p} &= M_{21} - M_{24} \\
r_{31} &= 0; \\
r_{32} - 2i_{23} &= 0; & r_{32} &= 2i_{23} \\
r_{33} - 4i_{23} - 4i_{36} - 3i_{35} &= 0; & r_{33} &= 4i_{23} + 4i_{36} + 3i_{35} \\
R_{3p} &= 0
\end{aligned}$$

Se poate observa că:

- reciprocitatea reacțiunilor unitare este satisfăcută;
- reacțiunile $r_{13} = r_{31} = 0$, deoarece nodurile 1 și 3 nu sunt legate direct.

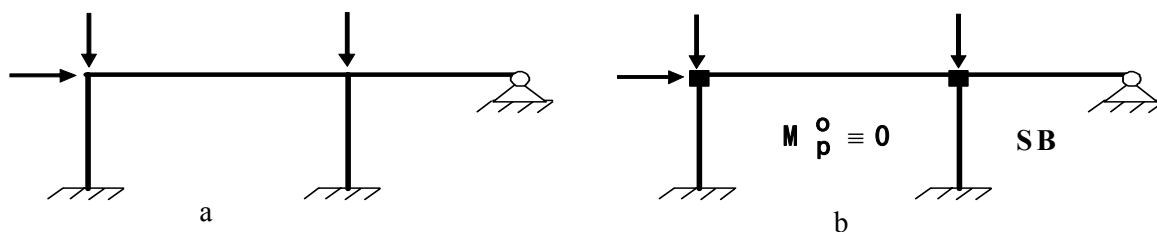
Prin rezolvarea sistemului de ecuații se obțin necunoscutele Z_1 , Z_2 și Z_3 , cu care se calculează momentele încovoietoare pe structura reală prin suprapunere de efecte, respectiv :

$$M_p = M_p^0 + m_1 \cdot Z_1 + m_2 \cdot Z_2 + m_3 \cdot Z_3$$

Pentru verificarea eficientă a diagramei finale de moment încovoietor se utilizează condiția de echilibru static (echilibrul de nod al momentelor încovoietoare).

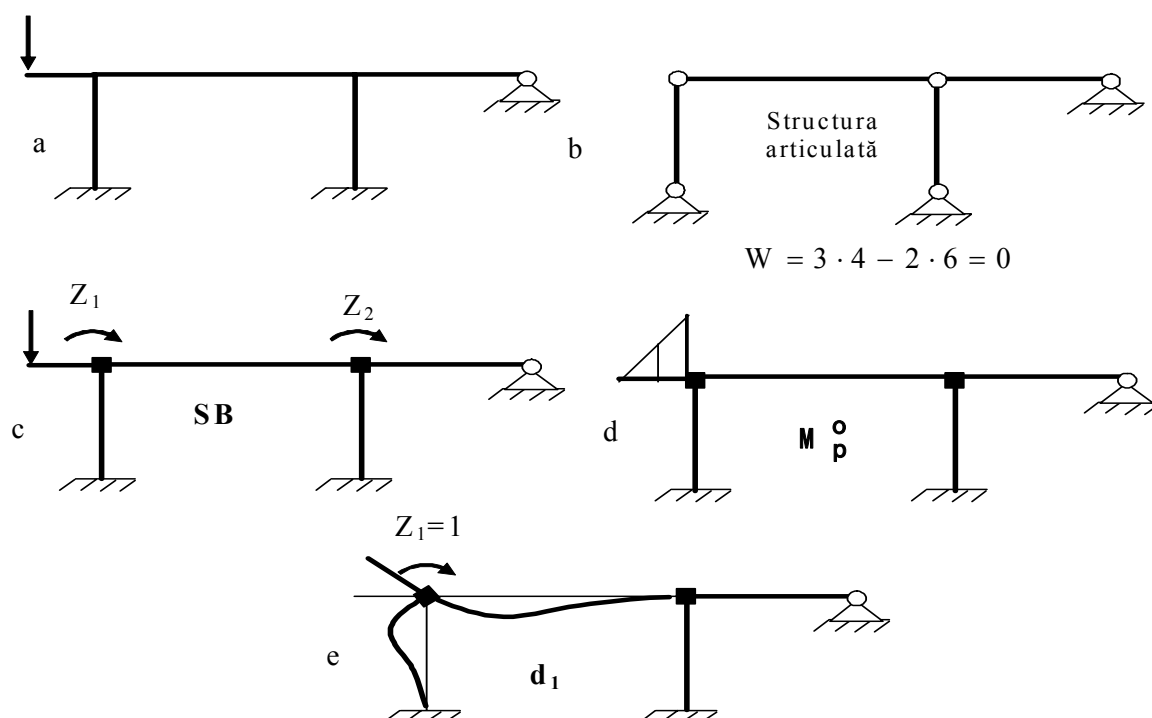
În cazul structurilor cu noduri fixe există două cazuri particulare de încărcare, respectiv:

- structura este încărcată numai cu forțe concentrate în noduri (fig.4.10,a). În această situație, diagrama $M_p^0 \equiv 0$ (fig.4.10,b), deci toți termenii liberi din sistemul ecuațiilor de condiție vor fi nuli, și se obține soluția banală $Z_i = 0$ ($i=1,2,\dots,n$). Ținând cont de relația (4.5), rezultă că și $M_p \equiv 0$ în orice secțiune. În barele structurii vor apărea numai eforturi axiale.



- Fig.4.10 -

- structura prezintă console (fig.4.11,a). În această situație consola nu se ia în considerație la calculul numărului de bare (fig.4.11,b), deoarece este un element static determinat și se rezolvă independent de structura.



- Fig.4.11 -

Efectul încărcării de pe consolă (dacă aceasta există) intervine numai în diagrama M_p^0 (fig.4.11,d) și deci în calculul termenului liber. Din încărcarea cu rotirea de nod consola, având capăt liber se rotește ca un solid rigid, fără să se deformeze (fig.4.11,e).

EXEMPLUL 4.1. Să se traseze diagramele de eforturi (M_p , T_p și N_p) la structura din figura 4.12 utilizând metoda deplasărilor.

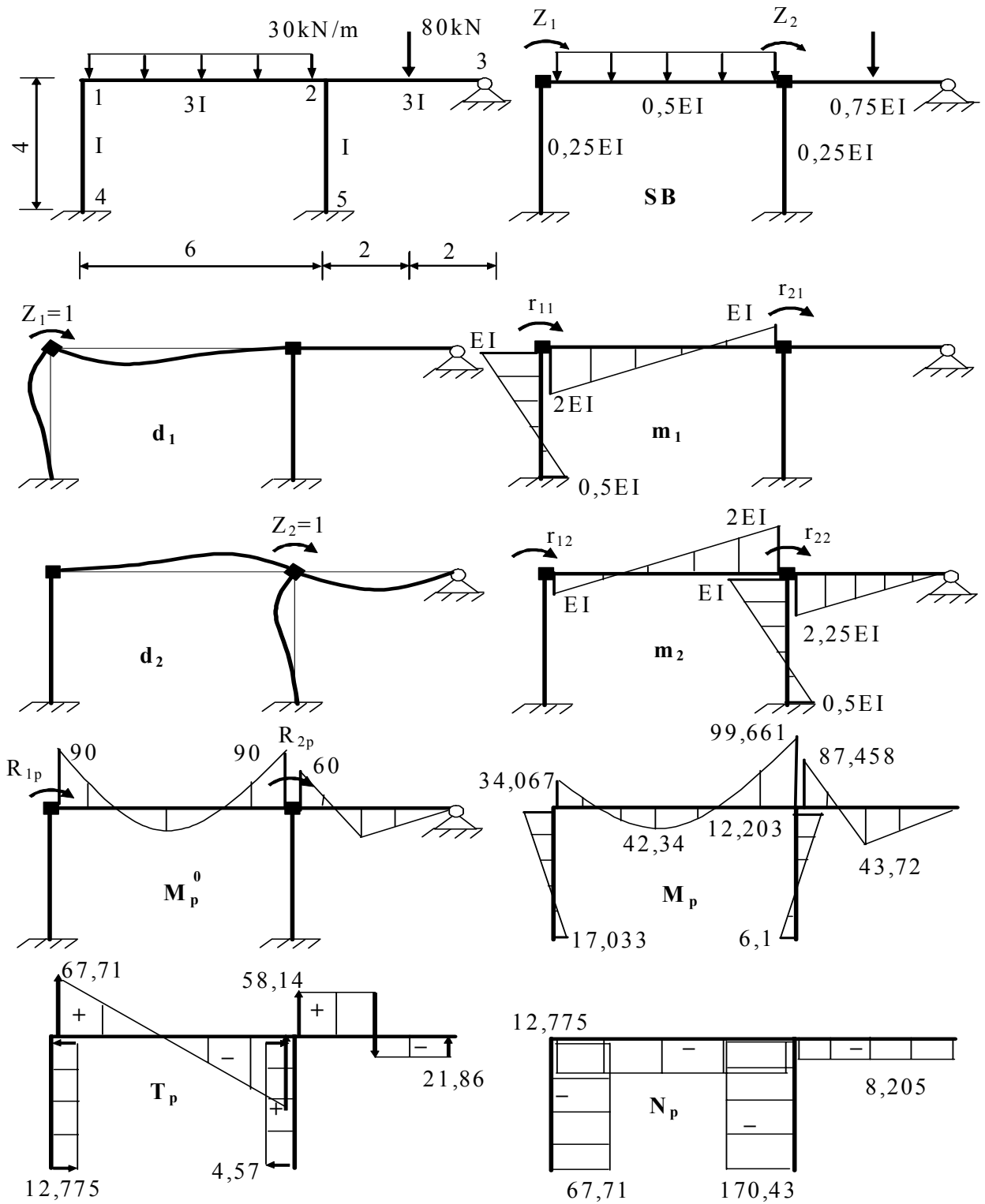
Din analiza structurii articulate rezultă

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0$$

deci nu există grade de libertate cinematice, iar structura reală este o structură cu noduri fixe.

Sistemul de bază se obține prin introducerea de blocaje de nod în cele două nodurile rigide ale structurii reale. Sistemul ecuațiilor de condiție este

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$



- Fig.4.12 -

Rigiditățile practice ale barelor sunt:

$$i_{12} = \frac{EI_{12}}{L_{12}} = \frac{3EI}{6} = 0,5EI; \quad i_{23} = \frac{EI_{23}}{L_{23}} = \frac{3EI}{4} = 0,75EI$$

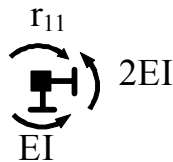
$$i_{14} = \frac{EI_{14}}{L_{14}} = \frac{EI}{4} = 0,25EI; \quad i_{25} = \frac{EI_{25}}{L_{25}} = \frac{EI}{4} = 0,25EI$$

Încărcând sistemul de bază succesiv cu rotirile $Z_1=1$, $Z_2=1$, rezultă formele deformatate d_1 și d_2 , precum și diagramele de momente încovoietoare m_1 respectiv m_2 . Din încărcarea sistemului de bază cu forțele exterioare rezultă diagrama M_p^0 . Momentele de încastrare perfectă, produse de forțe, sunt:

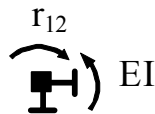
$$M_{12} = -M_{21} = \frac{pL^2}{12} = \frac{30 \cdot 6^2}{12} = 90 \text{ kNm};$$

$$M_{23} = \frac{3PL}{16} = \frac{3 \cdot 80 \cdot 4}{16} = 60 \text{ kNm}$$

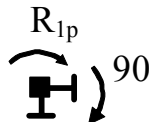
Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi



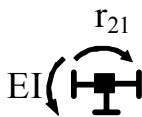
$$r_{11} - EI - 2EI = 0; \quad r_{11} = 3EI$$



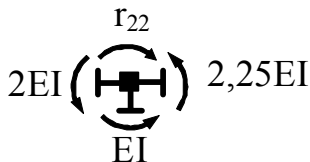
$$r_{12} - EI = 0; \quad r_{12} = EI$$



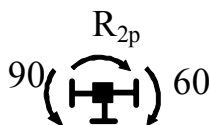
$$R_{1p} + 90 = 0; \quad R_{1p} = -90$$



$$r_{21} - EI = 0; \quad r_{21} = EI$$



$$r_{22} - 2EI - EI - 2,25EI = 0; \quad r_{22} = 5,25EI$$



$$R_{2p} + 60 - 90 = 0; \quad R_{2p} = 30$$

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} 3EI \cdot Z_1 + EI \cdot Z_2 - 90 = 0 \\ EI \cdot Z_1 + 5,25EI \cdot Z_2 + 30 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile $Z_1 = 34,067/EI$ și $Z_2 = -12,203/EI$

Momentele încovoietoare finale sunt calculate prin suprapunere de efecte cu relația

$$M_p = M_p^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$$

Dacă se folosesc momentele pe nod rezultă următoarele valori:

$$M_{12} = 90 - 2EI \cdot \left(\frac{34,067}{EI} \right) - EI \cdot \left(-\frac{12,203}{EI} \right) = 34,067 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -90 - EI \cdot \left(\frac{34,067}{EI} \right) - 2EI \cdot \left(-\frac{12,203}{EI} \right) = 99,661 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 60 - 2,25EI \cdot \left(-\frac{12,203}{EI} \right) = 87,458 \text{ kNm}$$

$$M_{25} = -EI \cdot \left(-\frac{12,203}{EI} \right) = 12,203 \text{ kNm}$$

$$M_{52} = -0,5EI \cdot \left(-\frac{12,203}{EI} \right) = 6,1 \text{ kNm}$$

$$M_{14} = -EI \cdot \left(\frac{34,067}{EI} \right) = -34,067 \text{ kNm}$$

$$M_{41} = -0,5EI \cdot \left(\frac{34,067}{EI} \right) = 17,033 \text{ kNm}$$

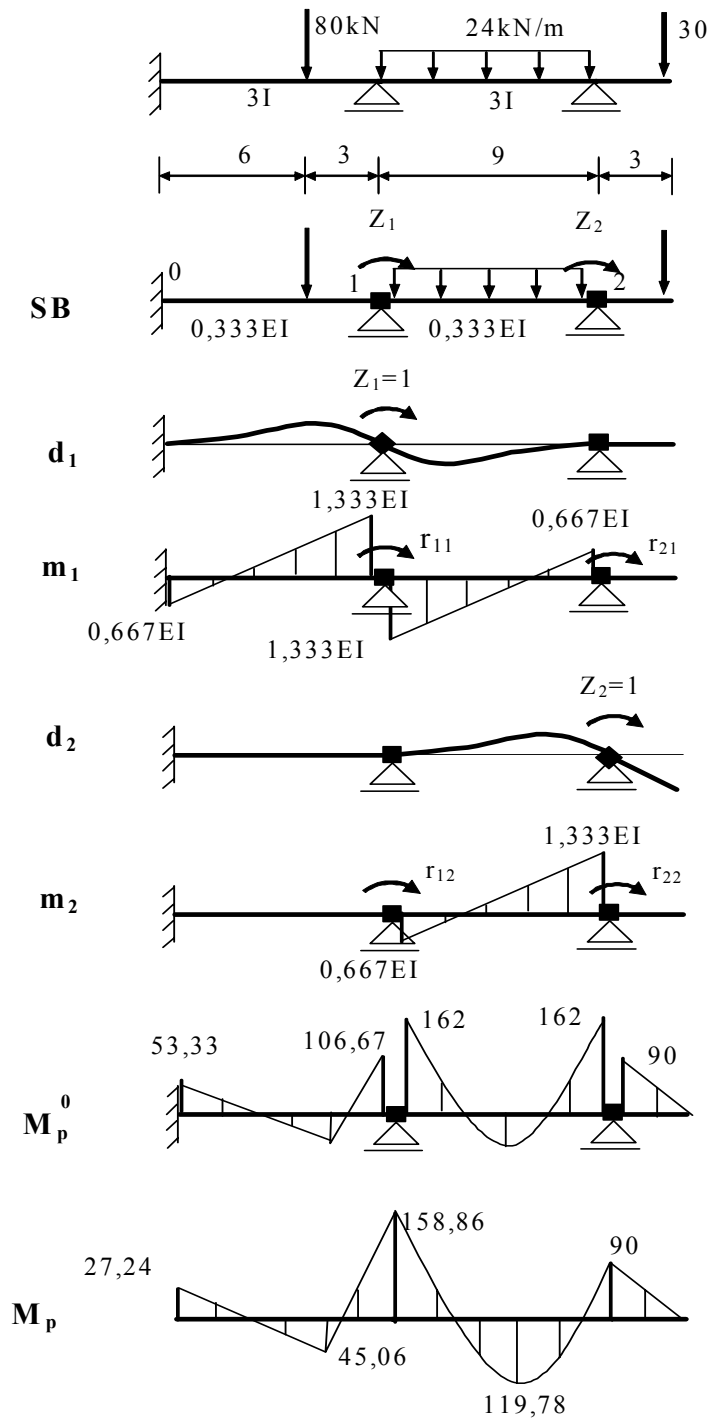
Diagrama de moment încovoietor este trasată în figura 4.12. Forțele tăietoare și forțele axiale din barele structurii reale se determină utilizând aceeași metodologie prezentată la metoda eforturilor. Diagramele respective sunt prezentate în figura 4.12.

Observații:

- În metoda deplasărilor verificarea eficientă a rezultatelor calculelor, este satisfacerea condiției de echilibru static.
- Se constată că eforturile nu depind de produsul EI, în cazul încărcării cu forțe.

EXEMPLUL 4.2 Să se traseze diagrama de moment încovoietor la grinda continuă din figura 4.13.

Această structură a mai fost rezolvată în paragraful 3.1 utilizând ecuația celor trei momente. Grinda continuă din figură este o structură cu noduri fixe, deoarece prezența rezemului fix (în cazul de față încastrarea) nu permite translația pe orizontală. Necunoscutele problemei sunt rotirile secțiunilor de pe reazeme.



- Fig.4.13 -

Rigiditățile practice ale barelor sunt:

$$i_{01} = \frac{EI_{01}}{L_{01}} = \frac{3EI}{9} = 0,333EI$$

$$i_{12} = \frac{EI_{12}}{L_{12}} = \frac{3EI}{9} = 0,333EI$$

Momentele de încastrare perfectă, produse de forțe, sunt:

$$M_{01} = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2} = \frac{80 \cdot 6 \cdot 3^2}{9^2} = 53,333 \text{ kNm}$$

$$M_{10} = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2} = \frac{80 \cdot 6^2 \cdot 3}{9^2} = 106,667 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = -M_{21} = \frac{pL^2}{12} = \frac{30 \cdot 6^2}{12} = 90 \text{ kNm}$$

Ecuatiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} 2,666EI \cdot Z_1 + 0,667EI \cdot Z_2 - 55,333 = 0 \\ 0,667EI \cdot Z_1 + 1,333EI \cdot Z_2 + 72 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile $Z_1 = 39,172/EI$ și $Z_2 = -73,614/EI$

Momentele încovoietoare finale sunt calculate prin suprapunere de efecte cu relația

$$M_p = M_p^0 + m_1Z_1 + m_2Z_2$$

Diagrama de moment încovoietor este trasată în figura 4.13. Se observă că s-au obținut aceleași valori ca și la exemplul 3.2.

4.3. Structuri cu noduri deplasabile

Structurile cu noduri deplasabile sunt acele structuri care sub acțiunea încărcărilor exterioare se deformează prin rotirea nodurilor rigide și translația nodurilor rigide și articulate pe direcțiile gradelor de libertate elastică. Deci, numărul de necunoscute este egal cu numărul nodurilor rigide plus numărul gradelor de libertate elastică.

Structurile cu noduri deplasabile se împart în două categorii:

- structuri cu stâlpi verticali;
- structuri cu stâlpi înclinați și/sau rigle în două pante.

Prima categorie reprezintă un caz particular al celei de-a doua, dar se tratează separat deoarece prezintă anumite particularități și este des utilizată în practică.

Principial, calculul structurilor cu noduri deplasabile se efectuează ca și cel al structurilor cu noduri fixe. Rezolvarea practică evidențiază însă deosebiri ca urmare a existenței deplasărilor pe direcțiile gradelor de libertate.

Sistemul ecuațiilor de condiție va avea aceeași semnificație fizică ca și în cazul structurilor cu noduri fixe, respectiv reacțiunile totale din legăturile suplimentare (blocaje de nod și legături de grad de libertate) să fie egale cu zero, deoarece aceste legături sunt fictive. Rezultă că vor exista atât ecuații de nod cât și ecuații de grad de libertate.

Dacă i este un nod, ecuația $R_i=0$ arată că reacțiunea moment din blocajul de nod este nulă. Ea este numită ecuație de nod și se deosebește de cea scrisă în cazul structurilor cu noduri fixe prin aceea că apar termeni suplimentari, rezultați din încărcarea sistemului de bază cu deplasări pe direcțiile gradelor de libertate.

Dacă j este un grad de libertate, ecuația $R_j=0$ arată că reacțiunea forță din legătura de grad de libertate este nulă. Ea este numită ecuație de grad de libertate.

În metoda deplasărilor ecuațiile de condiție sunt ecuații de echilibru static. Exprimarea echilibrului static se poate face fie folosind ecuații de proiecții și momente, fie aplicând principiul lucrului mecanic virtual.

Astfel, determinarea reacțiunilor din blocajele de nod se face prin ecuații de echilibru de momente, iar determinarea reacțiunilor din legăturile de grad de libertate se face prin ecuații de proiecții sau utilizând principiul lucrului mecanic virtual.

În cazul structurilor cu noduri deplasabile având stâlpi verticali, pentru calculul reacțiunilor din legăturile de grad de libertate se poate utiliza atât

ecuațiile de proiecții pe direcțiile gradelor de libertate cât și principiul lucrului mecanic virtual.

Pentru structurile cu stâlpi înclinați și/sau rigle în două pante, reacțiunile din legăturile de grad de libertate se determină utilizând numai principiul lucrului mecanic virtual.

4.3.1. Structuri cu stâlpi verticali

În calculul acestor tipuri de structuri apar următoarele particularități:

- la acțiunea translațiilor pe direcțiile gradelor de libertate, barele sistemului de bază se comportă astfel: riglele translatează, iar stâlpii se deformează.
- calculul reacțiunilor din legăturile de grad de libertate se poate efectua exprimând condiția de echilibru static fie prin ecuația de proiecție pe direcția gradului de libertate, fie utilizând principiul lucrului mecanic virtual.

Pentru a exemplifica modul de rezolvare a unei structuri cu noduri deplasabile având stâlpi verticali se consideră structura din figura 4.14.

Din analiza structurii articulate rezultă

$$W = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 - 2 = 2$$

deci structura articulată are două grade de libertate cinematică, iar structura reală este o structură cu noduri deplasabile având două grade de libertate elastică.

Sistemul de bază s-a obținut prin introducerea unui blocaj de nod în nodul rigid și de legături de grad de libertate pe direcțiile acestora. Numărul total de necunoscute este egal cu 3 (o rotire plus două translații).

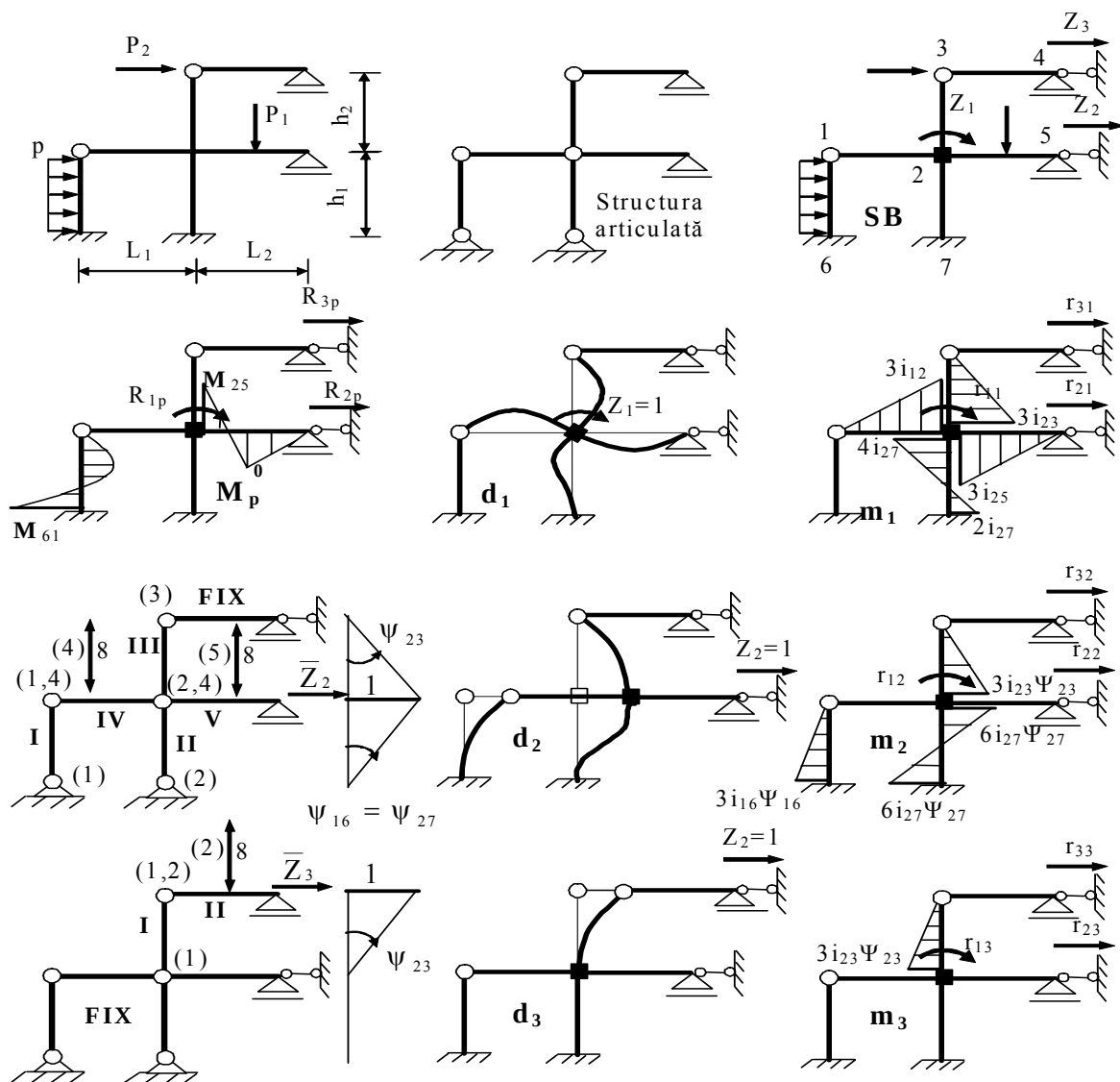
Sistemul de ecuații are forma

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$

unde prima ecuație este o ecuație de nod, iar celelalte două sunt ecuații de grad de libertate.

În calculul structurilor cu noduri deplasabile, comparativ cu structurile cu noduri fixe, apar ca elemente noi trasarea diagramelor unitare din încărcarea cu deplasări pe direcțiile gradelor de libertate elastică și calculul reacțiunilor din legăturile de grad de libertate.

Din încărcarea succesivă a sistemului de bază cu forțele exterioare și cu rotirea Z_1 se obțin diagramele de moment încovoietor M_p^0 respectiv m_1 .



- Fig.4.14 -

Pentru trasarea diagramei m_2 produsă de translația $Z_2=1$ pe direcția gradului de libertate respectiv (translația la nivelul 1) se parcurg următoarele etape:

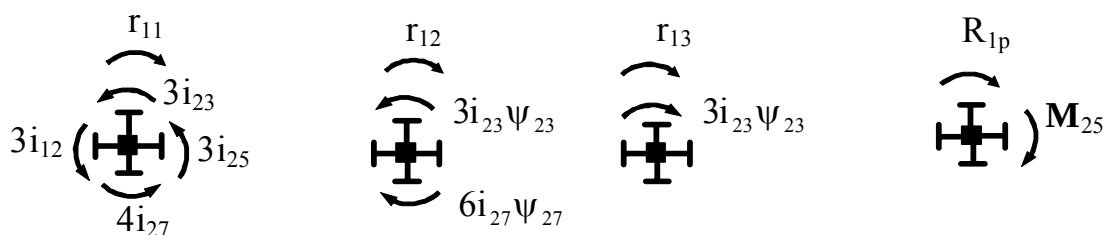
- Se analizează din punct de vedere cinematic structura articulată la acțiunea unei deplasări cinematice $\bar{Z}_2 = 1$. În acest sens se desenează diagrama de deplasări. Se observă că structura articulată are deplasări numai pe orizontală la nivelul inferior. Astfel, riglele 1-2 și 2-5 se translatează pe orizontală, deoarece centrul absolut de rotație este la infinit pe verticală, rigla 3-6 rămâne fixă, deoarece legătura de grad de libertate din nodul 4 nu permite translația pe orizontală, iar stâlpii se rotesc cu unghiurile $\psi_{16} = \psi_{27} = \frac{1}{h_1}$, respectiv $\psi_{23} = \frac{1}{h_2}$.

- Se desenează forma deformată a sistemului de bază, ținând cont de deplasările nodurilor din diagrama de deplasări (în cazul de față numai diagrama de deplasări pe orizontală). Astfel riglele 1-2 și 2-5 se vor translați, iar stâlpii se vor deforma. Acest mod de deformare reprezintă caracteristica esențială a calculului structurilor cu noduri deplasabile având stâlpii verticali.
- Se trasează diagrama de moment încovoietor în concordanță cu modul de deformare a sistemului de bază.

Pentru trasarea diagramei m_3 produsă de translația $Z_3=1$ pe direcția gradului de libertate respectiv (translația la nivelul 2) se parcurg aceleași etape. Din analiza cinematică a structurii articulate se desprind următoarele: partea inferioară a structurii rămâne fixă, deoarece legătura de grad de libertate din nodul 5 nu permite translația pe orizontală, rigla superioară se translatează pe orizontală, deoarece centrul său absolut de rotație este la infinit pe verticală, iar stâlpul superior se rotește cu unghiul ψ_{23} . În sistemul de bază va apărea diagramă de moment încovoietor numai pe stâlpul 2-3..

După trasarea diagramei unitare se trece la determinarea reacțiunilor. În acest sens, reacțiunile din blocaj de nod se determină din echilibrul de nod, iar cele din legăturile de grad de libertate din ecuația de proiecție pe orizontală sau utilizând principiul lucrului mecanic virtual.

Calculul reacțiunilor din blocajul de nod (fig.4.15)



- Fig.4.15 -

$$\sum M_i = 0$$

$$r_{11} - 3i_{12} - 4i_{27} - 3i_{25} - 3i_{23} = 0;$$

$$r_{12} - 3i_{23}\psi_{23} + 6i_{27}\psi_{27} = 0;$$

$$r_{13} + 3i_{23}\psi_{23} = 0;$$

$$R_{1p} + M_{25} = 0;$$

$$r_{11} = 3i_{12} + 4i_{27} + 3i_{25} + 3i_{23}$$

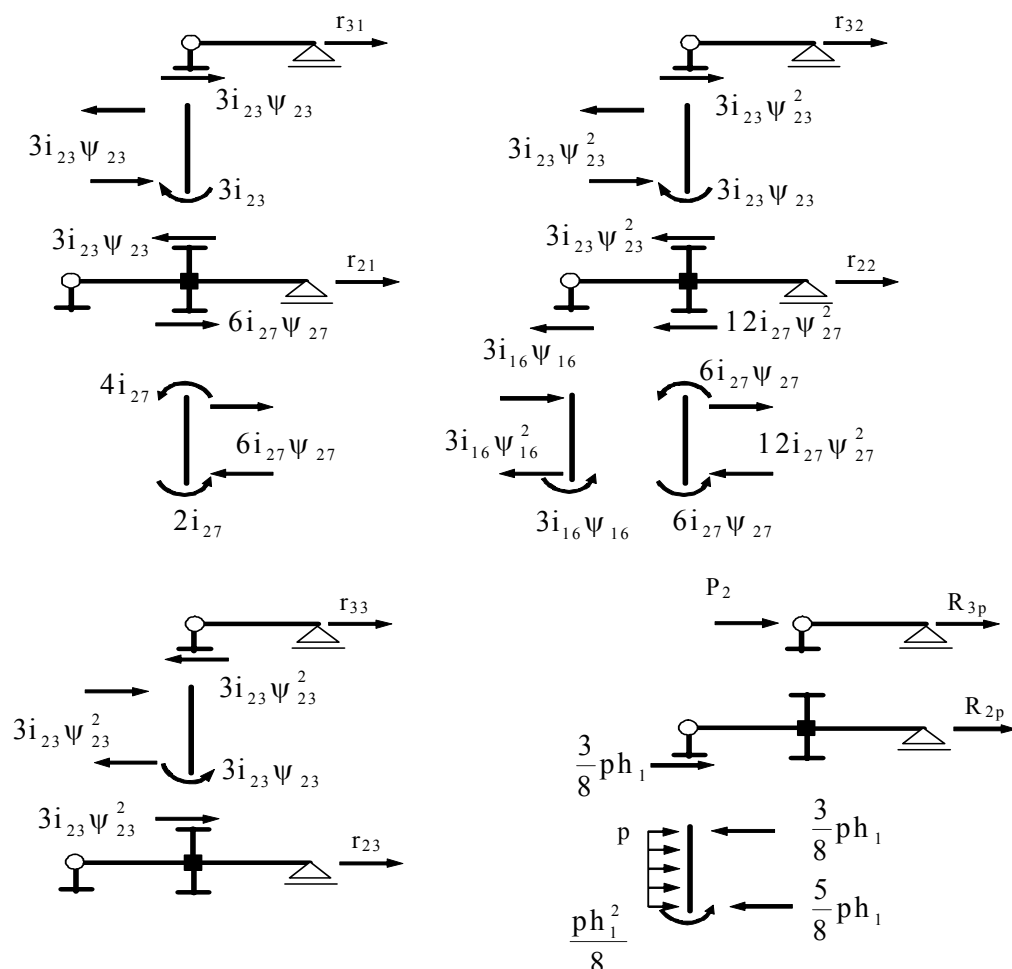
$$r_{12} = 3i_{23}\psi_{23} - 6i_{27}\psi_{27}$$

$$r_{13} = -3i_{23}\psi_{23}$$

$$R_{1p} = -M_{25}$$

Calculul reacțiunilor din legăturile de grad de libertate

a) *utilizând ecuația de proiecție pe orizontală* (fig.4.16). Pentru aceasta se secționează stâlpii în vecinătatea riglelor, și se pun în evidență forțele tăietoare pe stâlpi. Forțele tăietoare se calculează separând fiecare bară încărcată cu momentele de la capete și cu forțele ce-i revin (unde este cazul) și scriind ecuații de echilibru static (ecuații de momente în raport cu extremitățile sale). Forțele tăietoare de pe stâlpi se trec pe riglă cu sens schimbat. Astfel, pe rigle vor acționa forțele tăietoare, reacțiunile din legăturile de grad de libertate și eventuale forțe orizontale concentrate în noduri. Scriind câte o ecuație de proiecție pe orizontală se determină reacțiunile din legăturile de grad de libertate.



- Fig. 4.16 -

$$\sum X_i = 0;$$

$$r_{21} - 3i_{23}\psi_{23} + 6i_{27}\psi_{27} = 0;$$

$$r_{21} = 3i_{23}\psi_{23} - 6i_{27}\psi_{27}$$

$$r_{22} - 3i_{16}\psi_{16}^2 - 12i_{27}\psi_{27}^2 - 3i_{23}\psi_{23}^2 = 0;$$

$$r_{22} = 3i_{16}\psi_{16}^2 + 12i_{27}\psi_{27}^2 + 3i_{23}\psi_{23}^2$$

$$r_{23} + 3i_{23}\psi_{23}^2 = 0;$$

$$r_{23} = -3i_{23}\psi_{23}^2$$

$$r_{31} + 3i_{23}\psi_{23} = 0;$$

$$r_{31} = -3i_{23}\psi_{23}$$

$$r_{32} + 3i_{23}\psi_{23}^2 = 0;$$

$$r_{32} = -3i_{23}\psi_{23}^2$$

$$r_{33} - 3i_{23}\psi_{23}^2 = 0;$$

$$r_{33} = 3i_{23}\psi_{23}^2$$

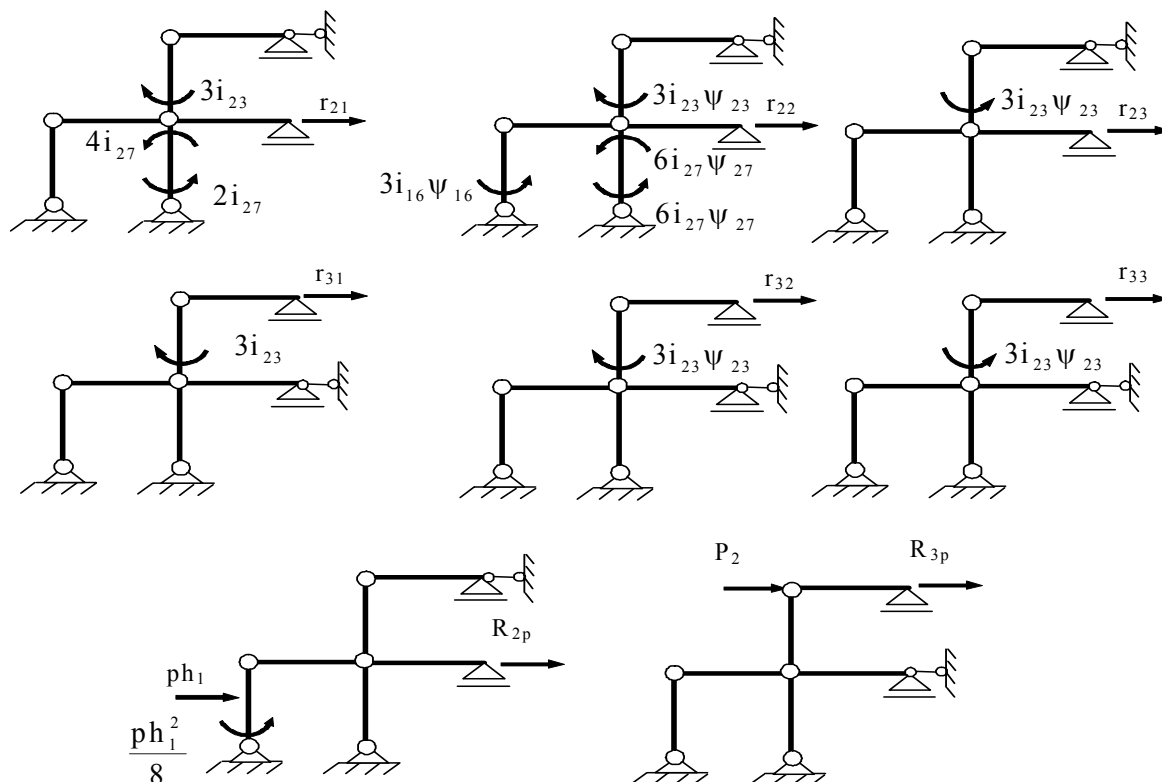
$$R_{2p} + \frac{3}{8}ph_1 = 0;$$

$$R_{2p} = -\frac{3}{8}ph_1$$

$$R_{3p} + P_2 = 0;$$

$$R_{3p} = -P_2$$

b) *utilizând principiul lucrului mecanic virtual* (fig.4.17). Pentru aceasta se încarcă structura articulată cu momentele încovoietoare și cu forțele date (după caz), se imprimă o deplasare virtuală pe direcția gradului de libertate unde acționează reacțiunea ce urmează a fi calculată și se scrie condiția ca lucrul mecanic virtual să fie egal cu zero ($\delta L = 0$). În această ecuație momentele încovoietoare care se introduc pe structura articulată sunt momente pe bare.



- Fig.4.17-

$$\delta L = 0;$$

$$\begin{aligned} r_{21} \cdot 1 + 3i_{23} \cdot (-\psi_{23}) + (2i_{27} + 4i_{27}) \cdot \psi_{27} &= 0; \\ r_{22} \cdot 1 - 3i_{16} \psi_{16} \cdot \psi_{16} - (6i_{27} \psi_{27} + 6i_{27} \psi_{27}) \cdot \psi_{27} + 3i_{23} \psi_{23} \cdot (-\psi_{23}) &= 0; \\ r_{23} \cdot 1 - 3i_{23} \psi_{23} \cdot (-\psi_{23}) &= 0; \\ r_{31} \cdot 1 + 3i_{23} \cdot \psi_{23} &= 0; \\ r_{32} \cdot 1 + 3i_{23} \psi_{23} \cdot \psi_{23} &= 0; \\ r_{33} \cdot 1 - 3i_{23} \psi_{23} \cdot \psi_{23} &= 0; \\ R_{2p} \cdot 1 - \frac{ph_1^2}{8} \cdot \psi_{16} + ph_1 \cdot \frac{1}{2} &= 0; \\ R_{3p} \cdot 1 + P_2 \cdot 1 &= 0; \end{aligned}$$

Tinând cont de expresiile rotirilor se obțin aceleași valori ale reacțiunilor unitare și a termenilor liberi ca și în cazul utilizării ecuației de proiecție pe orizontală.

Cu aceste elemente calculate se pot determina necunoscutele și eforturile pe structura reală, parcurgând etapele de la calculul structurilor cu noduri fixe.

EXEMPLUL 4.3. Să se traseze diagramele de eforturi la structura din figura 4.18.

Din analiza structurii auxiliare rezultă

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1$$

Sistemul ecuațiilor de condiție este

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

deci structura auxiliară are un grad de libertate cinematică, iar structura reală este o structură cu noduri deplasabile având un grad de libertate elastică (translația la nivelul riglei).

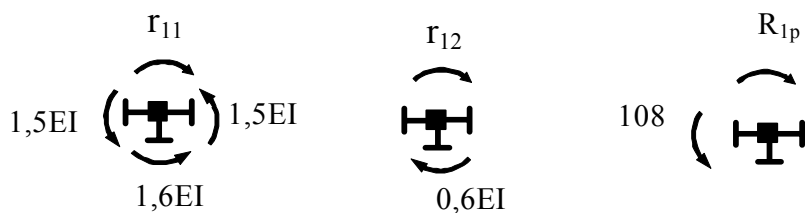
Sistemul de bază se obține prin blocarea rotirii nodului rigid și a translației pe direcția gradului de libertate elastică. Deci, structura, în metoda deplasărilor, are două necunoscute – o rotire și o translație.

Rigiditățile practice ale barelor sunt:

$$\begin{aligned} i_{12} &= \frac{EI_{12}}{L_{12}} = \frac{3EI}{6} = 0,5EI; & i_{13} &= \frac{EI_{13}}{L_{13}} = \frac{3EI}{6} = 0,5EI \\ i_{15} &= \frac{EI_{15}}{L_{15}} = \frac{1,6EI}{4} = 0,6EI; & i_{34} &= \frac{EI_{34}}{L_{34}} = \frac{EI}{4} = 0,25EI \end{aligned}$$

În ceea ce privește modul de deformare a barelor sistemului de bază, numai stâlpii se vor deforma, riglele translatându-se.

Reacțiunile din blocajul de nod sunt (fig.4.19):

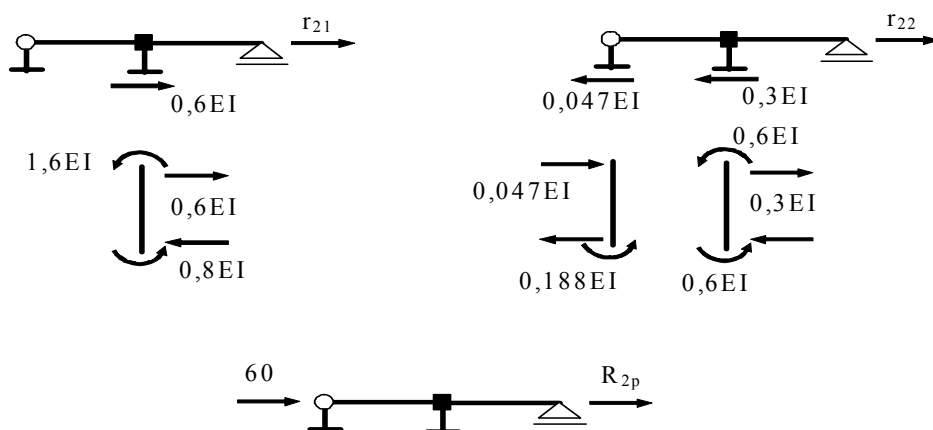


- Fig.4.19 -

$$\sum M_1 = 0; \quad r_{11} = 4,6EI \quad r_{12} = -0,6EI \quad R_{1p} = 108$$

Calculul reacțiunilor din legătura de grad de libertate:

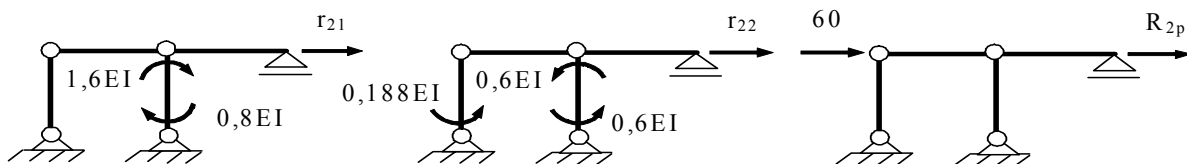
a) prin ecuația de proiecție pe orizontală (fig.4.20)



- Fig.4.20 -

$$\sum X_i = 0; \quad r_{21} = -0,6EI; \quad r_{22} = 0,347EI; \quad R_{2p} = -60$$

b) utilizând principiul lucrului mecanic virtual (fig.4.21)



- Fig.4.21 -

$$\delta L = 0;$$

$$r_{21} \cdot 1 + (0,8EI + 1,6EI) \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad r_{21} = -0,6EI$$

$$r_{22} \cdot 1 - 0,188EI \cdot \frac{1}{4} - (0,6EI + 0,6EI) \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad r_{22} = 0,347EI$$

$$R_{2p} \cdot 1 + 60 \cdot 1 = 0; \quad R_{2p} = -60$$

Cu aceste valori sistemul de ecuații devine

$$\begin{cases} 4,6EI \cdot Z_1 - 0,6EI \cdot Z_2 + 108 = 0 \\ -0,6EI \cdot Z_1 + 0,347EI \cdot Z_2 - 60 = 0 \end{cases}$$

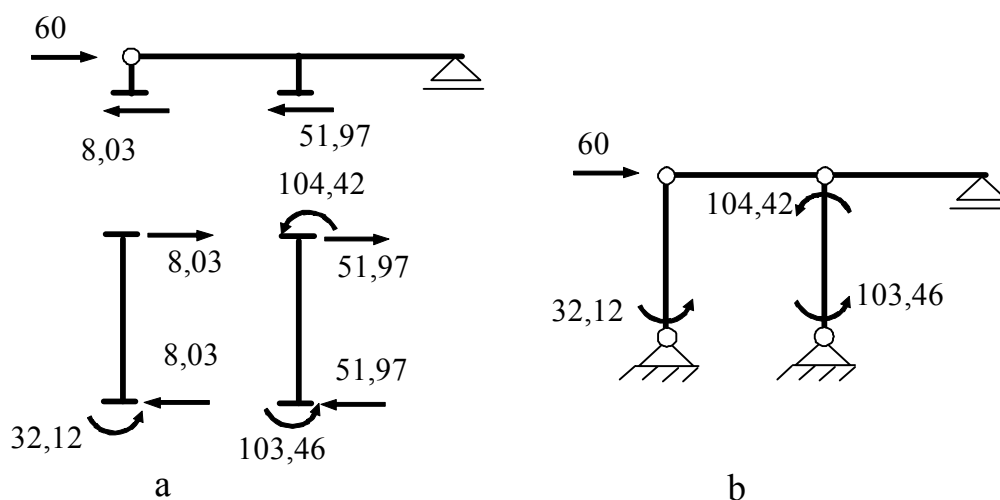
de unde rezultă $Z_1 = -1,194/EI$ și $Z_2 = 170,846/EI$

Momentele încovoietoare finale sunt calculate prin suprapunere de efecte cu relația

$$M_p = M_p^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$$

În figura 4.18 sunt prezentate diagramele de moment încovoietor, forță tăietoare și forță axială.

Verificarea rezultatelor se poate efectua scriind echilibrul static al structurii reale – fie echilibrul forțelor pe orizontală (fig.4.22,a), fie utilizând principiul lucrului mecanic virtual (fig.4.22,b).



- Fig.4.22 -

$$\sum X_i = 0; \quad 60 - 8,03 - 51,97 = 0$$

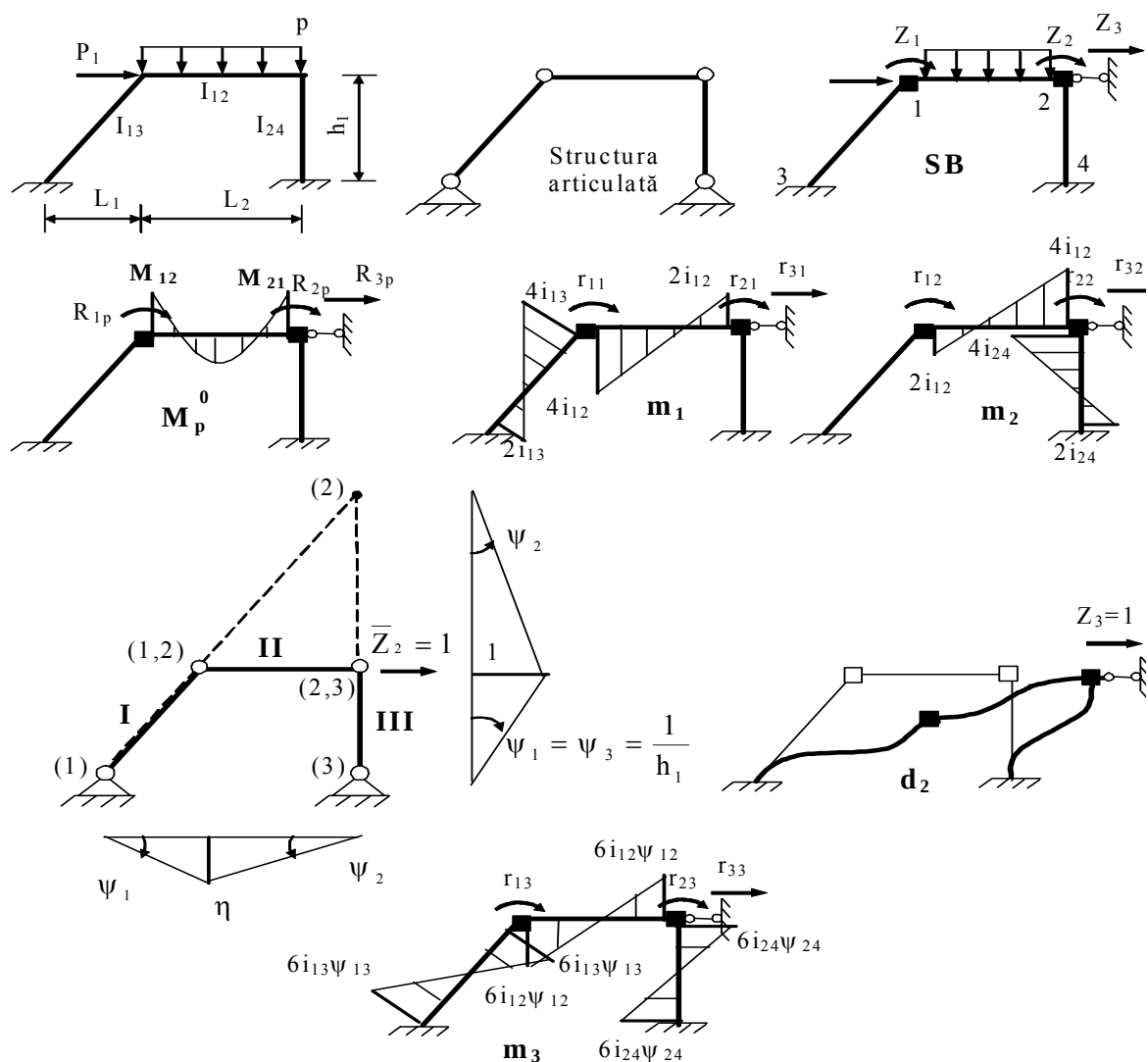
$$\delta L = 0; \quad 60 \cdot 1 - 32,12 \cdot \frac{1}{4} - (103,46 + 104,42) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

4.3.2. Structuri cu stâlpi înclinați și/sau rigle în două pante

În calculul acestor tipuri de structuri apar următoarele particularități:

- la acțiunea translațiilor pe direcțiile gradelor de libertate se deformează atât stâlpii cât și o parte din rigle;
- calculul reacțiunilor din legăturile de grad de libertate se efectuează exprimând condiția de echilibru static numai utilizând principiul lucrului mecanic virtual.

Pentru a exemplifica modul de rezolvare a unei structuri cu noduri deplasabile având stâlpi înclinați se consideră structura din figura 4.23.



- Fig.4.23 -

Din analiza structurii articulate rezultă

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$$

deci structura auxiliară are un grad de libertate cinematică, iar structura reală este o structură cu noduri deplasabile având un grad de libertate elastică.

Sistemul de bază se obține prin introducerea de blocaje de nod în nodurile rigide și a unei legături de grad de libertate pe direcția acestuia (translația pe orizontală la nivelul riglei). Numărul total de necunoscute este egal cu 3 (două rotații plus o translație).

Sistemul de ecuații are forma

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$

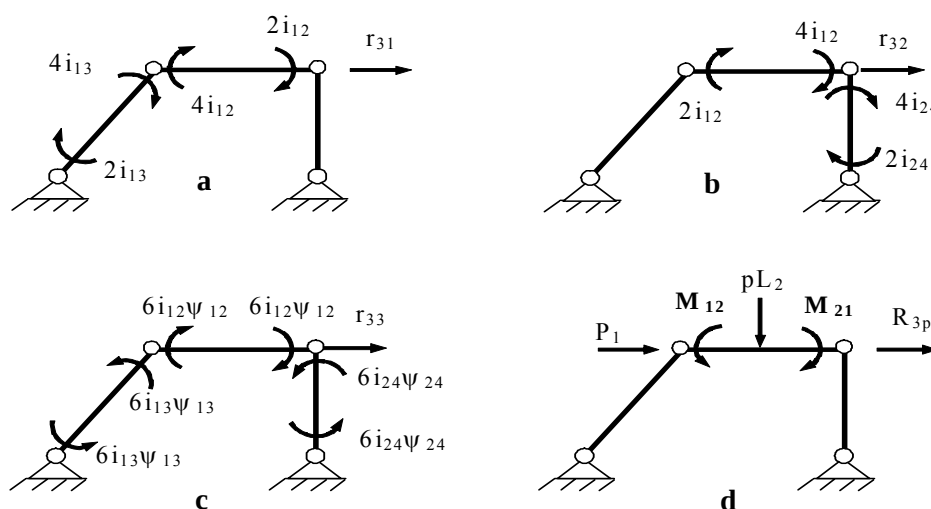
unde primele două ecuații sunt ecuații de nod, iar ultima este ecuație de grad de libertate.

Din încărcarea succesivă a sistemului de bază cu forțele exterioare și cu rotațiile $Z_1=1$, respectiv $Z_2=1$ se obțin diagramele de moment încovoietor M_p^0 , m_1 și m_2 .

Pentru trasarea diagramei m_3 produsă de deplasarea $Z_3=1$ pe direcția gradului de libertate se analizează mai întâi modul în care se deplasează barele structurii articulate pentru o deplasare cinematică $\bar{Z}_3 = 1$. Se constată că nodul 1 se deplasează atât pe orizontală cât și pe verticală, iar nodul 2 numai pe orizontală. În ceea ce privește modul de deformare a barelor sistemului de bază, se vor deforma atât stâlpii cât și rigla orizontală. Deci, apar momente încovoietoare pe toate barele sistemului de bază.

În continuare se prezintă calculul reacțiunilor din legătura de grad de libertate utilizând principiul lucrului mecanic virtual.

Calculul reacțiunii r_{31} . Se încarcă structura articulată cu momentele pe bare din diagrama m_1 și cu reacțiunea r_{31} (fig.4.24,a). Scriind condiția de lucru mecanic virtual egal cu zero, se obține:



- Fig.4.24 -

$$\delta L = 0; \quad r_{31} \cdot 1 + (2i_{13} + 4i_{13}) \cdot \psi_{13} + (4i_{12} + 2i_{12}) \cdot (-\psi_{12}) = 0$$

de unde rezultă

$$r_{31} = -6i_{13}\psi_{13} + 6i_{12}\psi_{12}$$

Calculul reacțiunii r_{32} . Se încarcă structura articulată cu momentele pe bare din diagrama m_2 și cu reacțiunea r_{32} (fig.4.24,b). Scriind condiția de lucru mecanic virtual egal cu zero, se obține:

$$\delta L = 0; \quad r_{32} \cdot 1 + (2i_{24} + 4i_{24}) \cdot \psi_{24} + (4i_{12} + 2i_{12}) \cdot (-\psi_{12}) = 0$$

de unde rezultă

$$r_{32} = -6i_{24}\psi_{24} + 6i_{12}\psi_{12}$$

Calculul reacțiunii r_{33} . Se încarcă structura articulată cu momentele pe bare din diagrama m_3 și cu reacțiunea r_{33} (fig.4.24,c). Scriind condiția de lucru mecanic virtual egal cu zero, se obține:

$$\delta L = 0; \quad r_{33} \cdot 1 - (6i_{13}\psi_{13} + 6i_{13}\psi_{13}) \cdot \psi_{13} - (6i_{24}\psi_{24} + 6i_{24}\psi_{24}) \cdot \psi_{24} + (6i_{12}\psi_{12} + 6i_{12}\psi_{12}) \cdot (-\psi_{12}) = 0$$

de unde rezultă

$$r_{33} = 12i_{13}\psi_{13}^2 + 12i_{24}\psi_{24}^2 + 12i_{12}\psi_{12}^2$$

Calculul reacțiunii R_{3p} . Se încarcă structura articulată cu momentele pe bare din diagrama M_p^0 , forțele date (forța orizontală P_1 și rezultanta încărcării de pe deschiderea 1-2) și cu reacțiunea R_{3p} (fig.4.24,d). Scriind condiția de lucru mecanic virtual egal cu zero, se obține:

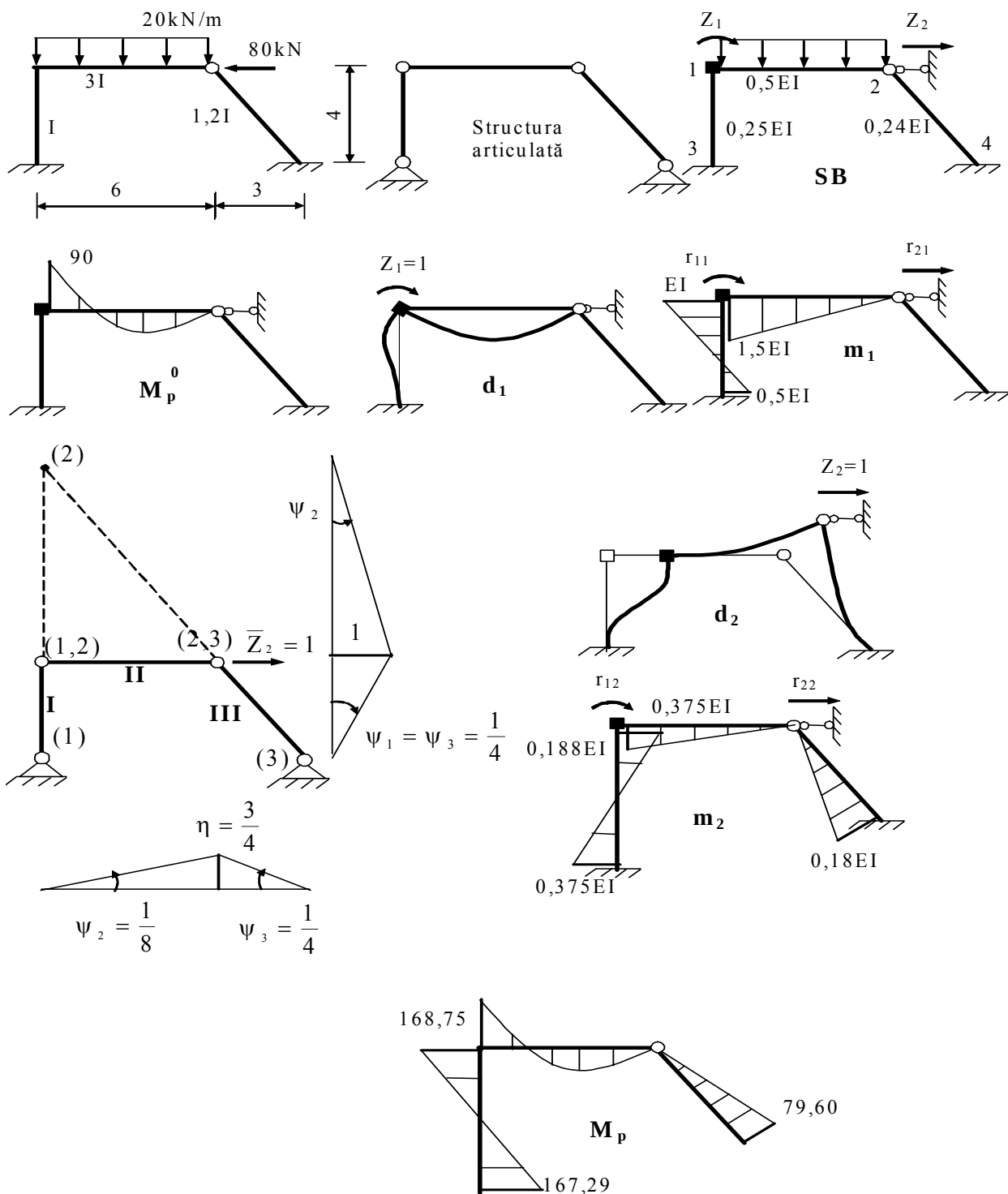
$$\delta L = 0; \quad R_{3p} \cdot 1 + (-M_{12} + M_{21}) \cdot (-\psi_{12}) + P_1 \cdot 1 + p \cdot L \cdot \frac{\eta}{2} = 0$$

de unde, deoarece $M_{12}=M_{21}$, rezultă

$$R_{3p} = -P_1 \cdot 1 - p \cdot L \cdot \frac{\eta}{2}$$

Celelalte etape de calcul rămân neschimbate.

EXEMPLUL 4.4. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 4.25.



- Fig.4.25 -

Din analiza structurii auxiliare rezultă

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1$$

deci structura auxiliară are un grad de libertate cinematică, iar structura reală este o structură cu noduri deplasabile având un grad de libertate elastică (translația la nivelul riglei).

Sistemul de bază se obține prin blocarea rotirii nodului rigid și a translației pe direcția gradului de libertate elastică. Deci, structura, în metoda deplasărilor, are două necunoscute – o rotire și o translație.

Sistemul ecuațiilor de condiție este

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Rigiditățile practice ale barelor sunt:

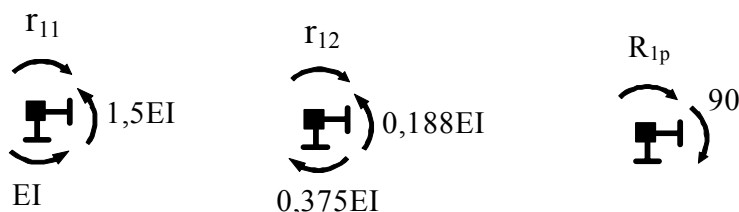
$$i_{12} = \frac{EI_{12}}{L_{12}} = \frac{3EI}{6} = 0,5EI; \quad i_{13} = \frac{EI_{13}}{L_{13}} = \frac{EI}{4} = 0,25EI;$$

$$i_{24} = \frac{EI_{24}}{L_{24}} = \frac{1,2EI}{5} = 0,24EI$$

Din încărcarea sistemului de bază cu forțele exterioare rezultă diagrama M_p^0 , iar din încărcarea cu rotirea $Z_1=1$, diagrama m_1 .

Pentru trasarea diagramei m_2 produsă de translația $Z_2=1$ pe direcția gradului de libertate se analizează mai întâi modul în care se deplasează barele structurii articulate, pentru o deplasare cinematică $\bar{Z}_2 = 1$. Se constată că nodul 1 se deplasează numai pe orizontală, iar nodul 2 atât pe orizontală cât și pe verticală. În ceea ce privește modul de deformare a barelor sistemului de bază, se vor deforma atât stâlpii cât și rigla orizontală. Deci, apar momente încovoietoare pe toate barele sistemului de bază.

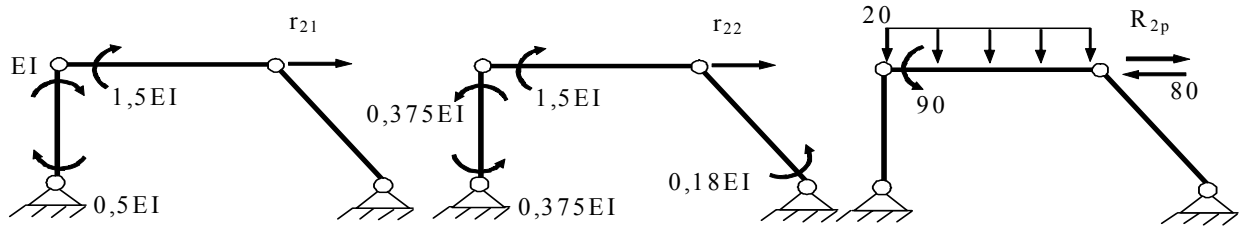
Reacțiunile din blocajul de nod sunt (fig.4.26):



- Fig.4.26 -

$$\sum M_1 = 0; \quad r_{11} = 2,5EI \quad r_{12} = -0,187EI \quad R_{1p} = -90$$

Reacțiunile din legătura de grad de libertate sunt (fig.4.27):



- Fig.4.27 -

$$\delta L = 0;$$

$$r_{21} \cdot 1 + (EI + 0,5EI) \cdot \frac{1}{4} + 1,5EI \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = 0; \quad r_{21} = -0,187EI$$

$$r_{22} \cdot 1 - 2 \cdot 0,375EI \cdot \frac{1}{4} - 0,18EI \cdot \frac{1}{4} + 0,188EI \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = 0; \quad r_{22} = 0,256EI$$

$$R_{2p} \cdot 1 - 90 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - 20 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) - 80 \cdot 1 = 0; \quad R_{2p} = -113,75$$

Cu aceste valori sistemul de ecuații devine

$$\begin{cases} 2,5EI \cdot Z_1 - 0,187EI \cdot Z_2 - 90 = 0 \\ -0,187EI \cdot Z_1 + 0,256EI \cdot Z_2 + 113,75 = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă $Z_1 = 2,923/EI$ și $Z_2 = -442,2/EI$

Momentele încovoietoare finale sunt calculate prin suprapunere de efecte cu relația

$$M_p = M_p^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$$

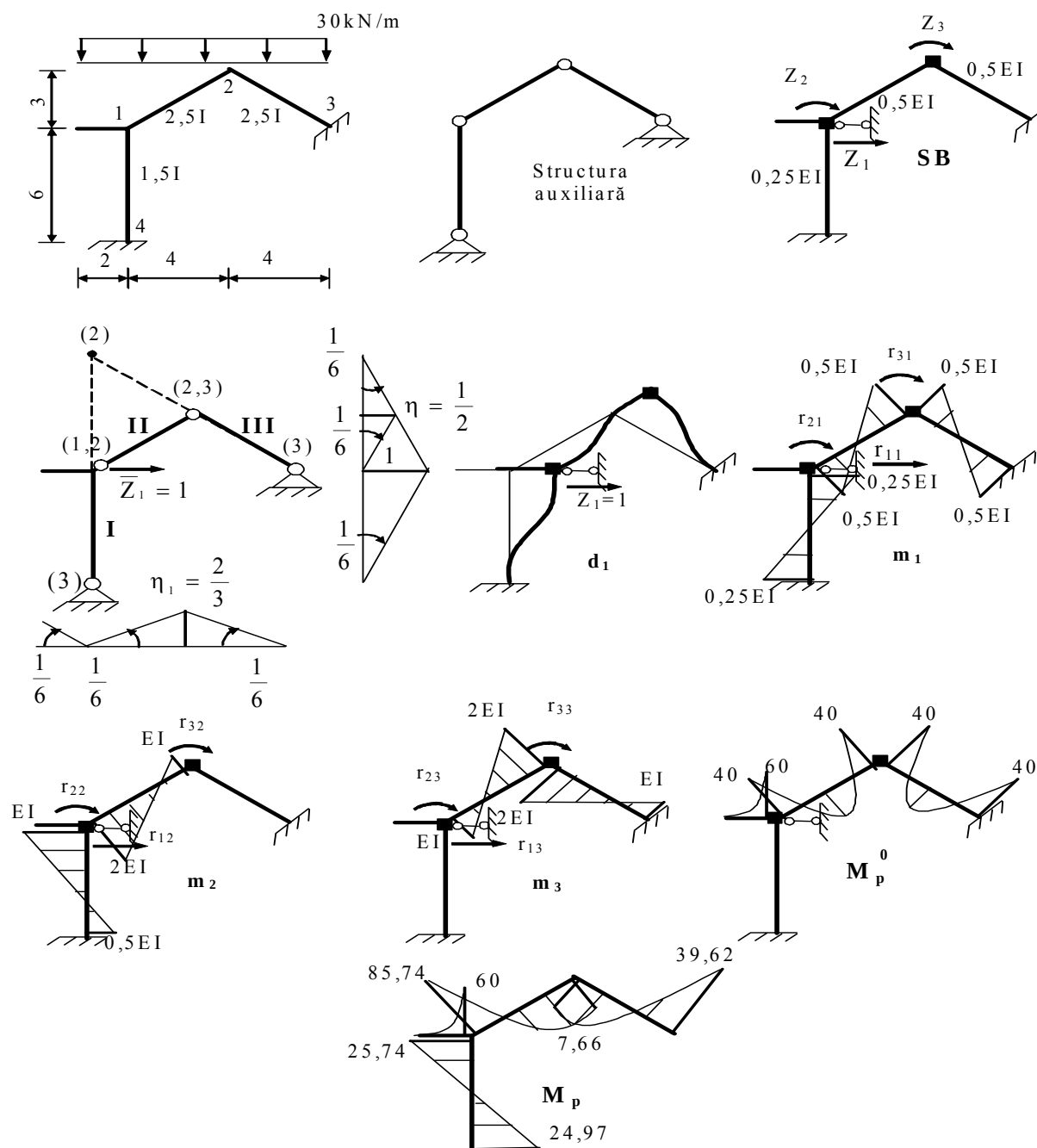
iar diagrama finală este redată în figura 4.25.

Verificarea corectitudinii calculului se realizează prin scrierea ecuațiilor de echilibru static, respectiv, echilibru de nod și echilibru ansamblului.

Echilibrul ansamblului se verifică utilizând principiul lucrului mecanic virtual, respectiv

$$\begin{aligned} \delta L = & (167,29 + 168,75) \cdot \frac{1}{4} + 79,6 \cdot \frac{1}{4} - 168,75 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - \\ & - 20 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) - 80 \cdot 1 = 3,75 \cdot 10^{-3} \approx 0 \end{aligned}$$

EXEMPLUL 4.5. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 4.28.



- Fig.4.28 -

Structura prezintă o consolă, iar rigla are două pante. Așa cum s-a prezentat la principiile generale ale metodei deplasărilor, în calculul numărului de grade de libertate nu se ține cont de existența consolei (aceasta fiind un element static determinat), iar existența unei rigle în două pante mărește cu o unitate numărul gradelor de libertate cinematică vis-a-vis de situația în care structura ar avea rigla orizontală (asemănător cu cazul unei bare curbe).

Deci, structura articulată are un grad de libertate cinematică, ($W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$), iar structura reală un grad de libertate elastică (translația pe orizontală la nivelul consolei). La fel de bine se putea considera ca grad de libertate elastică, translația pe verticală sau pe orizontală a punctului de intersecție al celor două rigle.

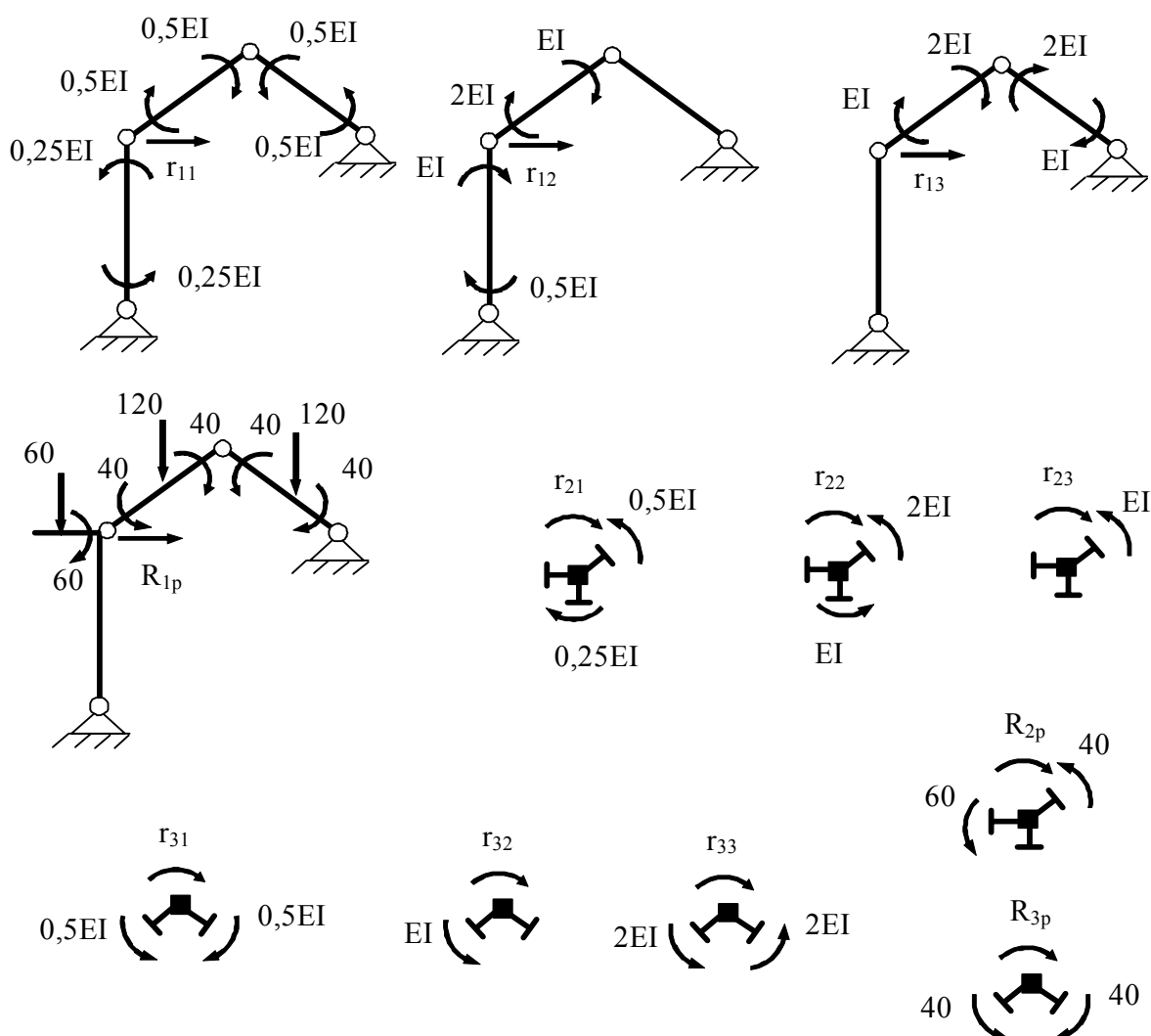
Ecuatiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$

Rigiditățile practice ale barelor sunt:

$$i_{12} = i_{23} = \frac{2,5EI}{5} = 0,5EI; \quad i_{14} = \frac{1,5EI}{6} = 0,25EI$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi (fig.4.29)



- Fig.4.29 -

$$r_{11} \cdot 1 - (0,25EI + 0,25EI) \cdot \frac{1}{6} + (0,5EI + 0,5EI) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) - (0,5EI + 0,5EI) \cdot \frac{1}{6} = 0$$

$$r_{11} = 0,417EI$$

$$r_{12} \cdot 1 + (EI + 0,5EI) \cdot \frac{1}{6} + (2EI + EI) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 0;$$

$$r_{12} = 0,25EI$$

$$r_{13} \cdot 1 + (EI + 2EI) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + (2EI + EI) \cdot \frac{1}{6} = 0;$$

$$r_{13} = 0$$

$$R_{1p} \cdot 1 + 60 \cdot \frac{1}{6} - 30 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} - 30 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 30 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0;$$

$$R_{1p} = 40$$

$$r_{21} = 0,25EI; \quad r_{22} = 3EI; \quad r_{23} = EI; \quad R_{2p} = 20$$

$$r_{31} = 0; \quad r_{32} = EI; \quad r_{33} = 4EI; \quad R_{3p} = 0$$

Cu aceste valori sistemul de ecuații devine:

$$\begin{cases} 0,417EI \cdot Z_1 + 0,25EI \cdot Z_2 + 40 = 0 \\ 0,25EI \cdot Z_1 + 3EI \cdot Z_2 + EI \cdot Z_3 + 20 = 0 \\ EI \cdot Z_2 + 4EI \cdot Z_3 = 0 \end{cases}$$

Necunoscutele au următoarele valori:

$$Z_1 = -96,841/EI; \quad Z_2 = 1,531/EI; \quad Z_3 = -0,383/EI$$

Diagrama finală de moment încovoietor este dată în figura 4.28.

4.4. Structuri simetrice

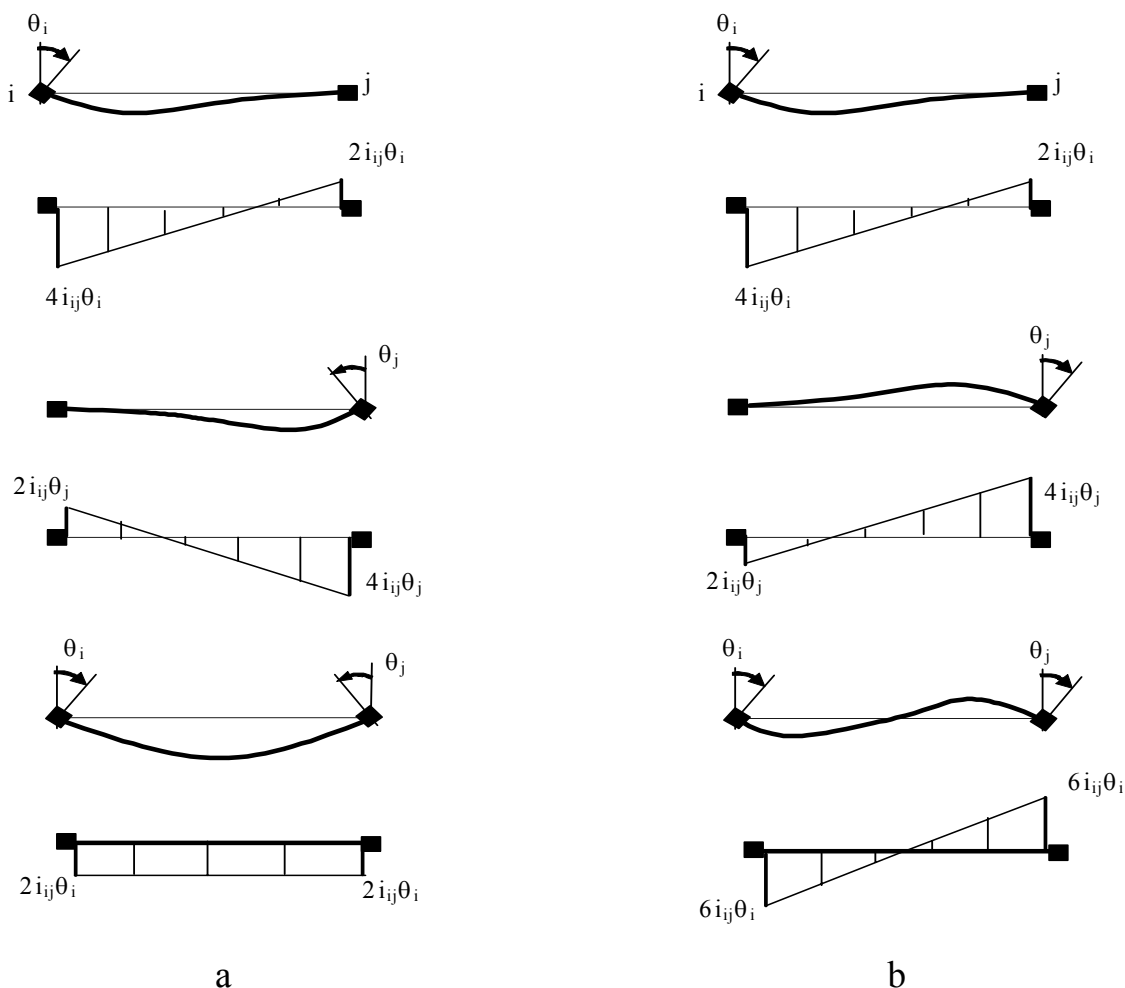
Structurile simetrice în raport cu o axă sunt acele structuri, care prin forma lor, tipurile de rezemări și caracteristicile geometrice ale secțiunilor transversale respectă condiția de simetrie. În metoda deplasărilor, utilizarea proprietăților de simetrie conduce la simplificări, concretizate în reducerea numărului de necunoscute.

Pentru rezolvarea structurilor simetrice prin metoda deplasărilor se pot utiliza următoarele două procedee de calcul: procedeul semistructurilor și procedeul grupării necunoscutelor.

Îndiferent de procedeul utilizat, trebuie să se țină seama de particularitățile metodei deplasărilor, respectiv de modul de comportare în sistemul de bază a barei dublu încastrate, intersectată de axa de simetrie la mijlocul deschiderii.

În acest sens se consideră bara dublu încastrată în cele două situații de încărcare: rotirile de la capetele barei sunt simetrice, respectiv antisimetrice.

În cazul încărcării simetrice (fig.4.30,a), deformata barei este simetrică (cu tangenta zero în axa de simetrie), iar diagrama de moment încovoiator este simetrică (în cazul de față constantă).



- Fig.4.30 -

Valorile momentelor de la capete se determină prin suprapunere de efecte (efectul rotirii fiecărui nod, respectiv θ_i și $\theta_j = -\theta_i$), respectiv

$$\begin{aligned} M_{ij} &= M_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j = M_{ij} - 2i_{ij}\theta_i \\ M_{ji} &= M_{ji} - 2i_{ij}\theta_i - 4i_{ij}\theta_j = M_{ji} - 2i_{ij}\theta_i \end{aligned} \quad (4.31)$$

unde M_{ij} , M_{ji} reprezintă momentele de încastrare perfectă produse de forțele exterioare în secțiunile i respectiv j și care își conțin și semnul. În cazul încărcării simetrice $M_{ij} = -M_{ji}$.

În cazul încărcării antisimetrice (fig.4.30,b), deformata barei este antisimetrică (cu punct de inflexiune în axa de simetrie), iar diagrama de moment încovoietor este antisimetrică.

Valorile momentelor de la capete se determină prin suprapunere de efecte (efectul rotirii fiecărui nod, cu θ_i și $\theta_j=\theta_i$), respectiv

$$\begin{aligned} M_{ij} &= M_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j = M_{ij} - 6i_{ij}\theta_i \\ M_{ji} &= M_{ji} - 2i_{ij}\theta_i - 4i_{ij}\theta_j = M_{ji} - 6i_{ij}\theta_i \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.4.1. Procedul semistructurilor

Principiile care stau la baza alegerii semistructurilor au fost stabilite în paragraful 2.4 și sunt aceleași indiferent de metoda utilizată pentru rezolvare.

În ceea ce privește calculul practic se fac următoarele precizări:

- în cazul barei dublu încastrate intersectată de axa de simetrie la mijlocul deschiderii se vor utiliza diagramele din figura 4.30 în funcție de încărcare. În relațiile (4.30) și (4.31), i_{ij} reprezintă rigiditatea practică a barei intersectate de axa de simetrie;
- în cazul încărcării simetrice, structurile cu noduri deplasabile care nu au rigla în două pante se comportă ca structuri cu noduri fixe.

În continuare sunt prezentate două exemple numerice rezolvate prin procedeul semistructurilor.

EXEMPLUL 4.6. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 4.31 utilizând procedeul semistructurilor. Structura este identică cu cea de la exemplul 2.2, care a fost rezolvată prin metoda eforturilor.

Structura este o structură cu noduri deplasabile având un grad de libertate

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 2 = 1$$

Încărcarea fiind simetrică, deformata este simetrică, iar deplasarea pe direcția gradului de libertate este zero ca deplasare antisimetrică. În consecință structura se comportă ca o structură cu noduri fixe. Sistemul de bază al structurii reale are ca necunoscute rotirile celor două noduri rigide.

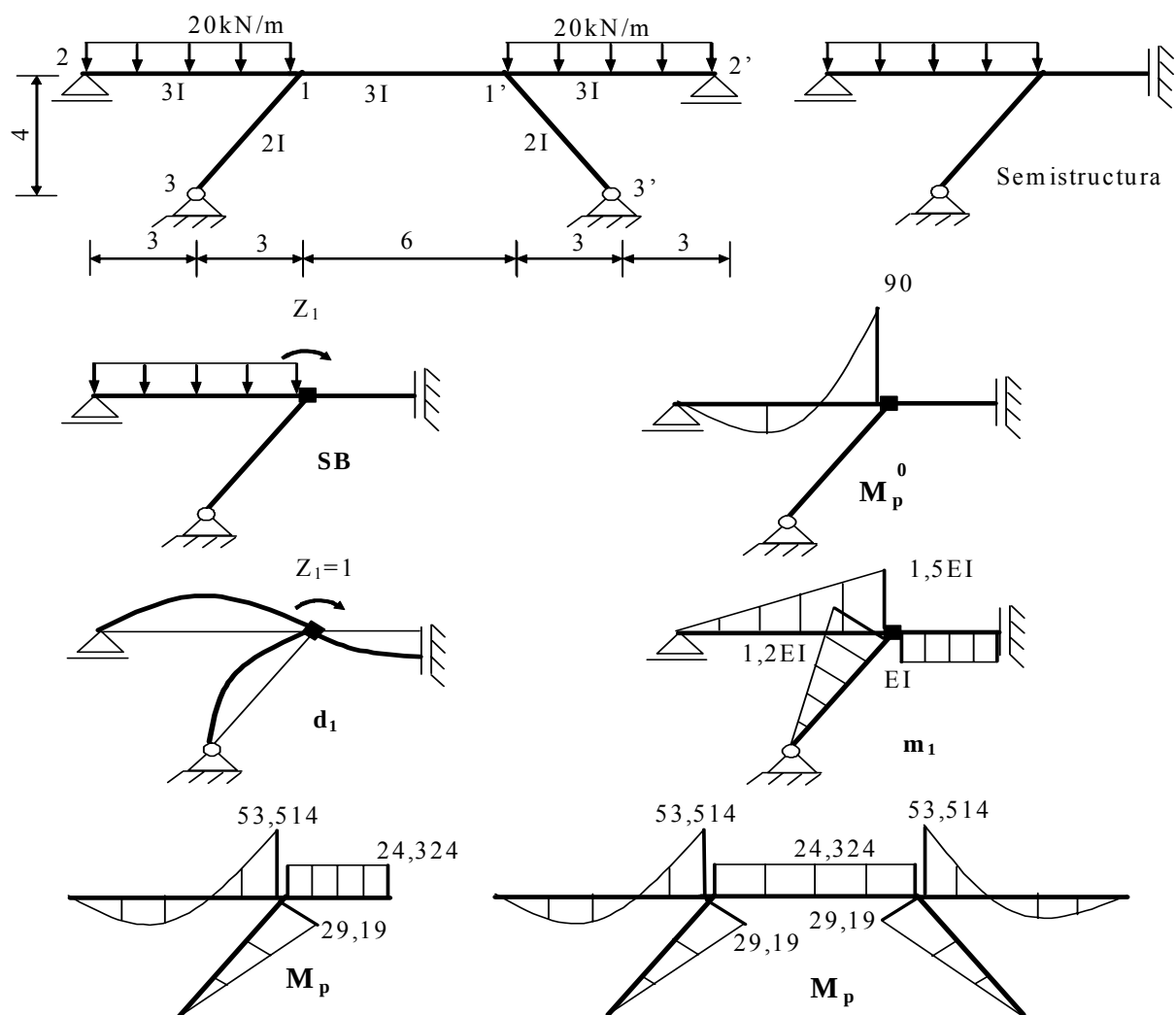
Folosind procedeul semistructurilor numărul de necunoscute se reduce la una. Ecuația de condiție este

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

Rigiditățile practice ale barelor calculate pe întreaga structură sunt:

$$i_{12} = i_{1'2'} = \frac{3EI}{6} = 0,5EI; \quad i_{13} = i_{1'3'} = \frac{2EI}{5} = 0,4EI; \quad i_{11'} = \frac{3EI}{6} = 0,5EI$$

Încărcând sistemul de bază al semistructurii cu rotirea $Z_1=1$, pe rigla 1s apare o diagramă constantă cu valoarea $2i_{11'}$ (a se vedea relația 4.31).



- Fig.4.31 -

Momentele de încastrare perfectă produse de forțele exterioare se calculează pe întreaga structură și se trec pe semistruktură în mod corespunzător:

$$M_{12} = M_{1'2'} = \frac{20 \cdot 6^2}{8} = 90 \text{ kNm}$$

Coeficientul necunoscutei și termenului liber sunt:

$$r_{11} = 3,7EI; \quad R_{lp} = 90$$

Necunoscuta Z_1 are valoarea:

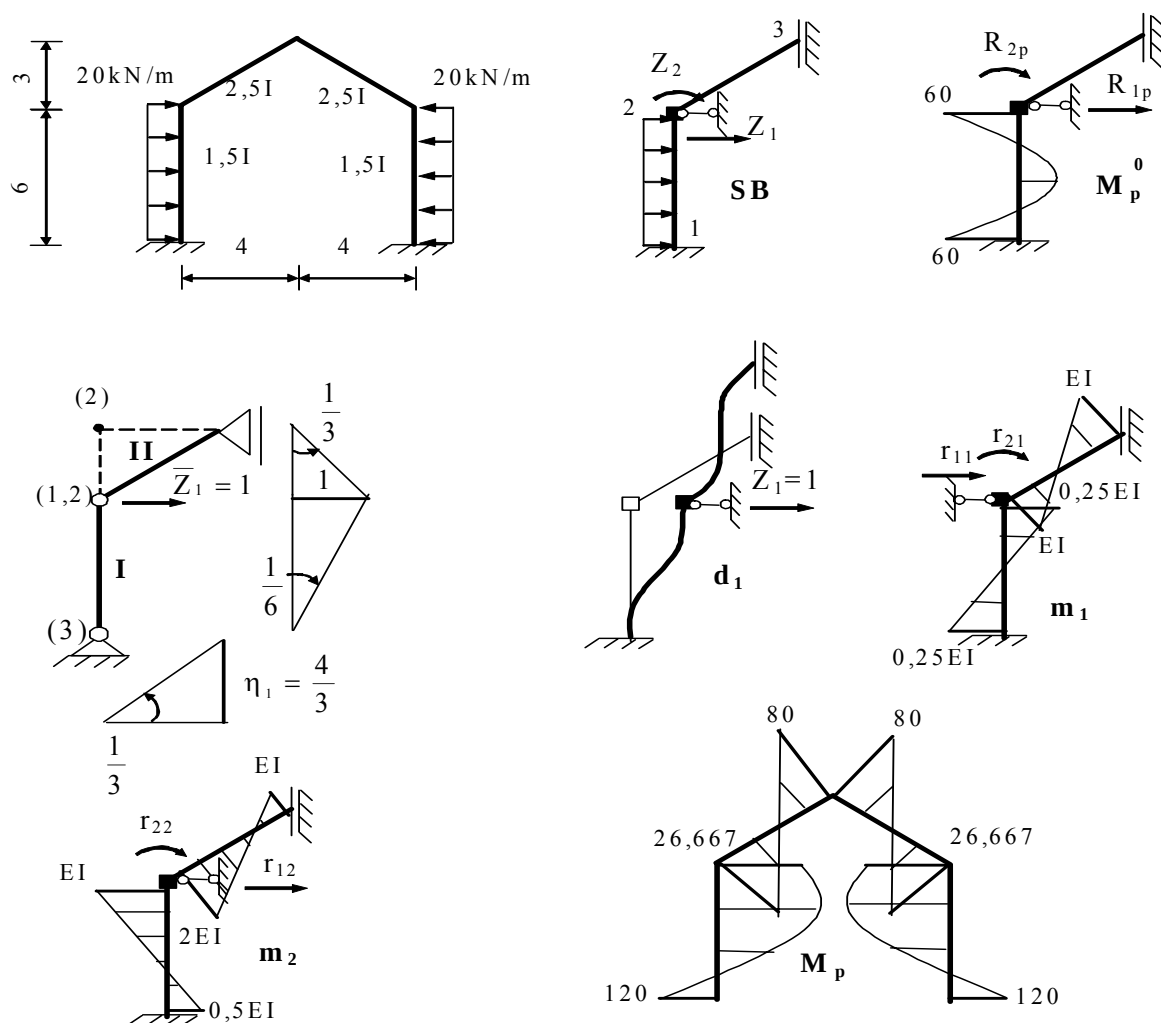
$$Z_1 = -\frac{R_{lp}}{r_{11}} = -\frac{90}{3,7EI} = -\frac{23,324}{EI}$$

Diagrama de moment încovoietor pe semistruktură se obține prin suprapunere de efecte

$$M_p = M_p^0 + m_1 Z_1$$

Diagrama finală de moment încovoietor pe structura reală este simetrică (fig.4.31). Se obțin aceleași valori ca și în metoda eforturilor.

EXEMPLUL 4.7. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 4.32 utilizând procedeul semistructurilor.



- Fig.4.32 -

Structura este simetrică având rigla centrală în două pante, deci este o structură cu noduri deplasabile, având două grade de libertate. Semistructura corespunzătoare încărcării simetrice are un grad de libertate. Particularitatea unei asemenea structuri constă în aceea că în deplasarea pe direcția gradului de libertate se deformează și rigla.

Sistemul ecuațiilor de condiție este

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Rigiditățile practice ale barelor sunt:

$$i_{12} = \frac{1,5EI}{6} = 0,25EI; \quad i_{23} = \frac{2,5EI}{5} = 0,5EI;$$

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi sunt:

$$r_{11} \cdot 1 - (0,25EI + 0,25EI) \cdot \frac{1}{6} + (EI + EI) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \quad r_{11} = 0,75EI$$

$$r_{12} \cdot 1 + (EI + 0,5EI) \cdot \frac{1}{6} + (2EI + EI) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 0; \quad r_{12} = 0,75EI$$

$$R_{1p} \cdot 1 + 20 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + (60 - 60) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad R_{1p} = -60EI$$

$$r_{21} = 0,75EI; \quad r_{22} = 3EI; \quad R_{2p} = 60$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 0,75EI \cdot Z_1 + 0,75EI \cdot Z_2 - 60 = 0 \\ 0,75EI \cdot Z_1 + 3EI \cdot Z_2 + 60 = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă $Z_1 = 133,333/EI$ și $Z_2 = -53,333/EI$

Momentele încovoietoare finale sunt calculate prin suprapunere de efecte cu relația

$$M_p = M_p^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$$

iar diagrama finală este redată în figura 4.32.

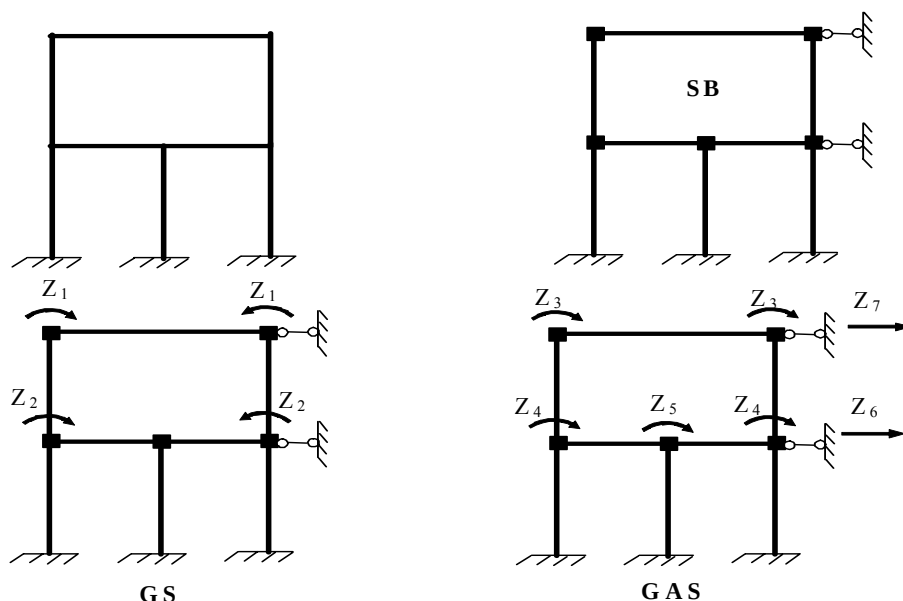
4.4.2. Procedul grupării necunoscutelor

În acest procedeu se operează pe structura întreagă. Astfel, sistemul de bază rezultă întotdeauna simetric, iar necunoscutele simple sunt grupate în necunoscute grupate simetric și necunoscute grupate antisimetric. În acest fel sistemul general al ecuațiilor de condiție se descompune în două sisteme independente; unul care conține numai necunoscutele grupate simetric și altul care conține numai necunoscutele grupate antisimetric. Evident că numărul total de necunoscute din cele două sisteme este egal cu numărul de necunoscute simple ale structurii date.

Se cunoaște că o încărcare oarecare poate fi întotdeauna descompusă într-o componentă simetrică și una antisimetrică. Componenta simetrică a încărcării deformează simetric structura, deci necunoscutele grupate antisimetric rezultă nule, iar componenta antisimetrică a încărcării deformează antisimetric structura, deci necunoscutele grupate simetric rezultă nule.

În concluzie, *pentru o încărcare simetrică se folosește grupul de ecuații care conține necunoscutele grupate simetric, iar pentru o încărcare antisimetrică se folosește grupul de ecuații care conține necunoscutele grupate antisimetric.*

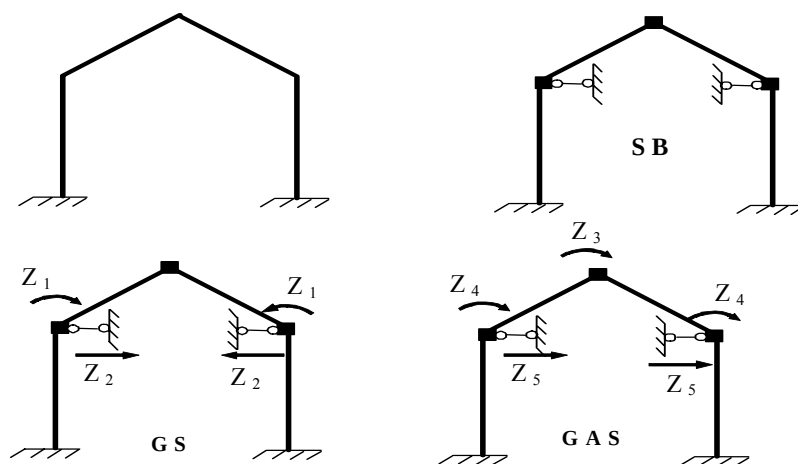
Pentru exemplificarea modului în care se grupează necunoscutele se consideră structurile din figura 4.33 și 4.34.



- Fig.4.33 -

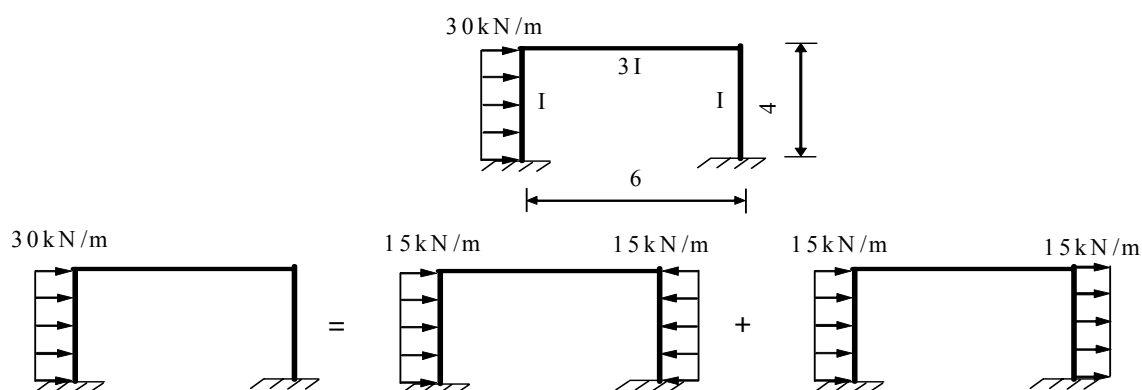
Pentru structura din figura 4.33 rotirile nodurilor simetrice se pot grupa în rotiri grupate simetric și rotiri grupate antisimetric. Rotirea nodului din axa de simetrie va fi o rotire simplă antisimetrică. Translațiile pe direcțiile gradelor de libertate sunt deplasări simple, ele nu se pot grupa, deci vor fi necunoscute antisimetrice. Deci, pentru gruparea simetrică vor fi două necunoscute, iar pentru gruparea antisimetrică vor fi cinci necunoscute.

Pentru structura din figura 4.34 (are rigla în două pante), care are două grade de libertate, acestea se pot grupa ca și rotirile nodurilor rigide simetrice. Astfel rezultă pentru gruparea simetrică 2 necunoscute, iar pentru gruparea antisimetrică trei necunoscute.



- Fig.4.34 -

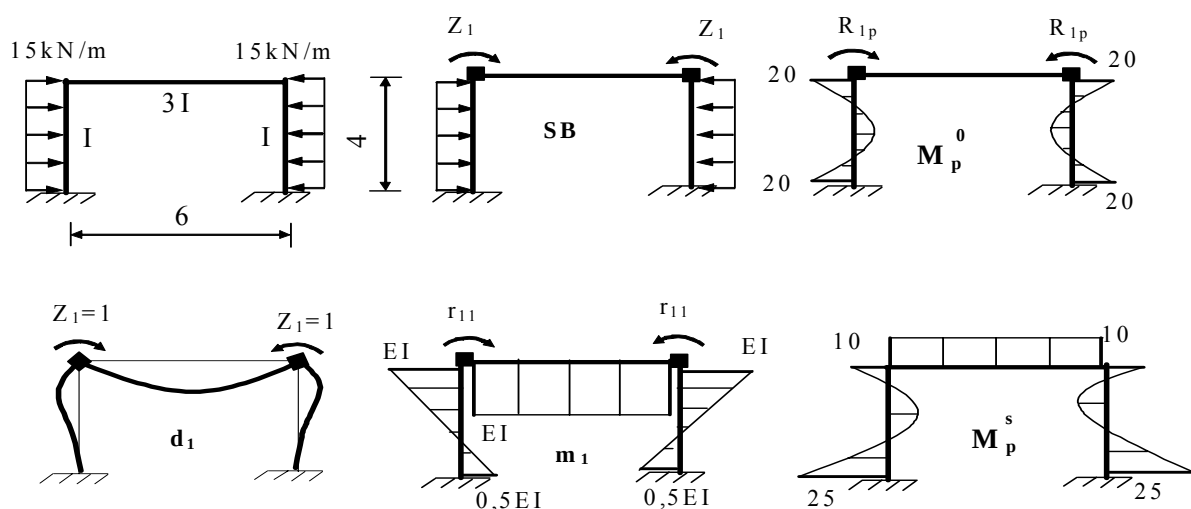
EXEMPLUL 4.8. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 4.35 utilizând procedeul grupării necunoscutelor.



- Fig.4.35 -

Structura este simetrică și încărcată oarecare. Încărcarea oarecare se descompune într-o componentă simetrică și una antisimetrică. Se rezolvă separat pentru cele două situații de încărcare și apoi se suprapun efectele

Încărcarea simetrică (fig.4.36)



- Fig.4.36 -

În cazul încărcării simetrice structura se comportă ca o structură cu noduri fixe. Astfel rezultă o singură necunoscută, rotirea nodurilor, grupată simetric. În diagrama m_1 pe riglă momentul încovoietor este constant și egal cu $2i_{11}$.

Rigiditățile practice ale barelor sunt:

$$i_{11'} = \frac{3EI}{6} = 0,5EI; \quad i_{12} = i_{1'2'} = \frac{EI}{4} = 0,25EI$$

Ecuția de condiție este

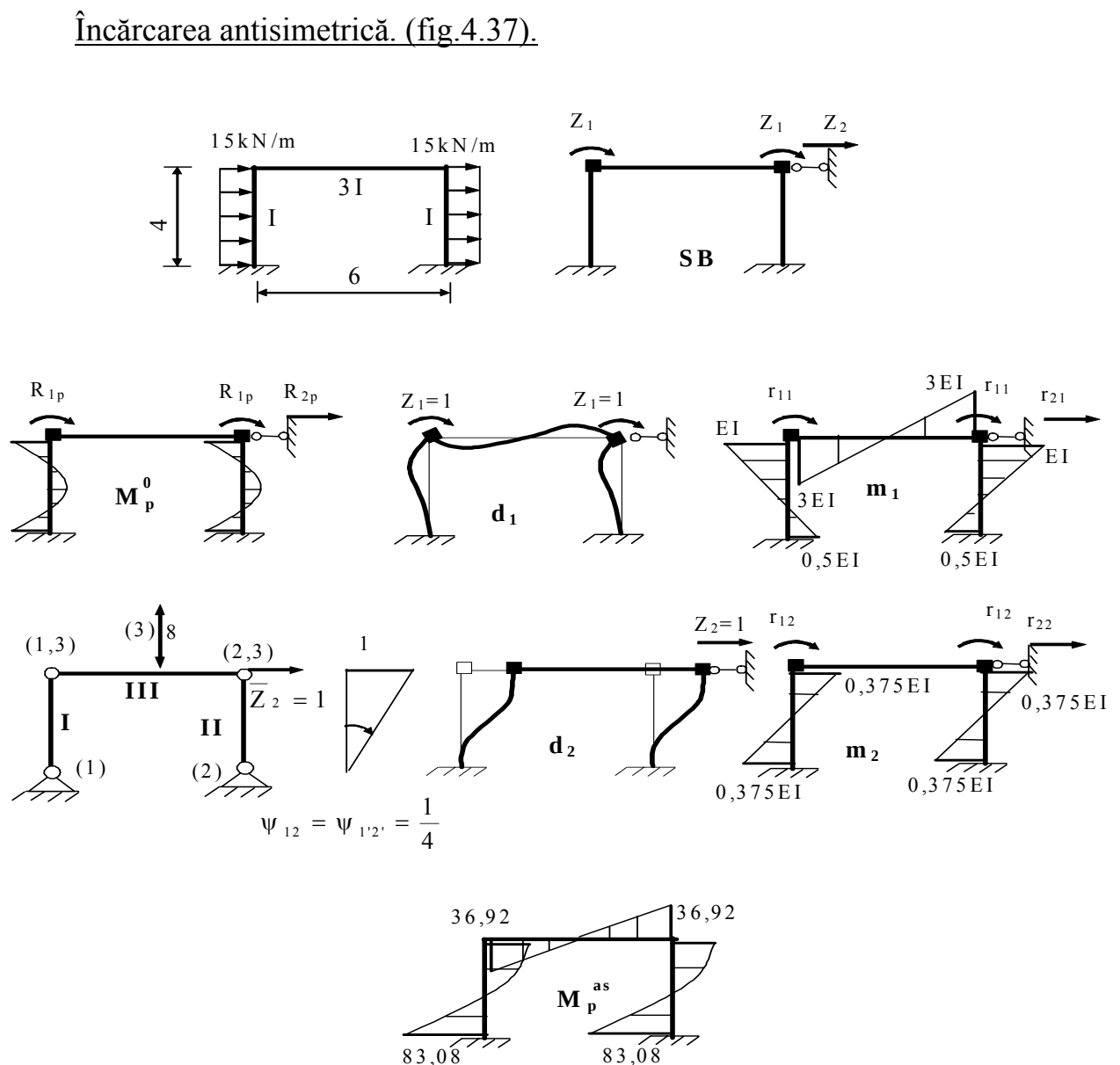
$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

unde

$$r_{11} = 2 \cdot (EI + EI) = 4EI; \quad R_{1p} = 2 \cdot 20 = 40$$

$$\text{Necunoscuta } Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{40}{4EI} = -\frac{10}{EI}$$

Diagrama de moment încovoietor pentru încărcarea simetrică este prezentată în figura 4.36.



- Fig.4.37 -

Structura fiind simetrică și încărcată antisimetric va avea deformată antisimetrică. Rotirile nodurilor se grupează antisimetric. Din încărcarea cu aceste rotiri pe riglă apare o diagramă antisimetrică cu valorile $6i_{11}$, la extremități (a se vedea relațiile 4.32)..

Ecuatiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Coeficienților necunoscutelor și termenii liberi sunt

$$r_{11} = 2 \cdot (EI + 3EI) = 8EI;$$

$$r_{12} = 2 \cdot (-0,375EI) = -0,75EI;$$

$$R_{1p} = 2 \cdot 20 = 40;$$

$$r_{21} \cdot 1 + (EI + 0,5EI) \cdot \frac{1}{4} + (EI + 0,5EI) \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad r_{21} = -0,75EI$$

$$r_{22} \cdot 1 - 2 \cdot 0,375EI \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot 0,375EI \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad r_{22} = 0,375EI$$

$$R_{2p} \cdot 1 + 15 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 15 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 0; \quad R_{2p} = -60$$

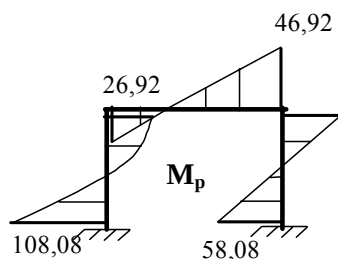
Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 8EI \cdot Z_1 - 0,75EI \cdot Z_2 + 40 = 0 \\ -0,75EI \cdot Z_1 + 0,375EI \cdot Z_2 - 60 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile $Z_1 = 12,308/EI$ și $Z_2 = 184,615/EI$

Diagrama de momente încovoietoare pentru încărcarea antisimetrică este prezentată în figura 4.37.

Prin suprapunere de efecte rezultă diagrama de momente încovietoare pe structura reală cu încărcare oarecare (fig.4.38).



- Fig.4.38 -

4.5. Efectul variației de temperatură

Pentru rezolvarea prin metoda deplasărilor a structurilor la acțiunea variației de temperatură, sistemul ecuațiilor de condiție devine:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1t} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2t} = 0 \\ \vdots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nt} = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

unde termenii liberi, de forma R_{it} , reprezintă reacțiunile din legăturile suplimentare datorită acțiunii variației de temperatură.

Particularitatea calculului prin metoda deplasărilor constă în modul de evaluare a efectului variației de temperatură asupra sistemului de bază. Variația de temperatură acționează asupra sistemului de bază prin temperatura medie din axa barelor, care produce modificarea lungimii acestora și prin diferența de temperatură între fața superioară și cea inferioară a barelor care produce curbarea barelor.

Sistemul de bază fiind multiplu static nedeterminat, ambele acțiuni produc eforturi, la capetele barelor luând naștere momente încovoietoare de tipul momentelor încovoietoare de încastrare perfectă. În concluzie există o diagrama M_t^0 , care se obține prin suprapunerea celor două efecte, respectiv:

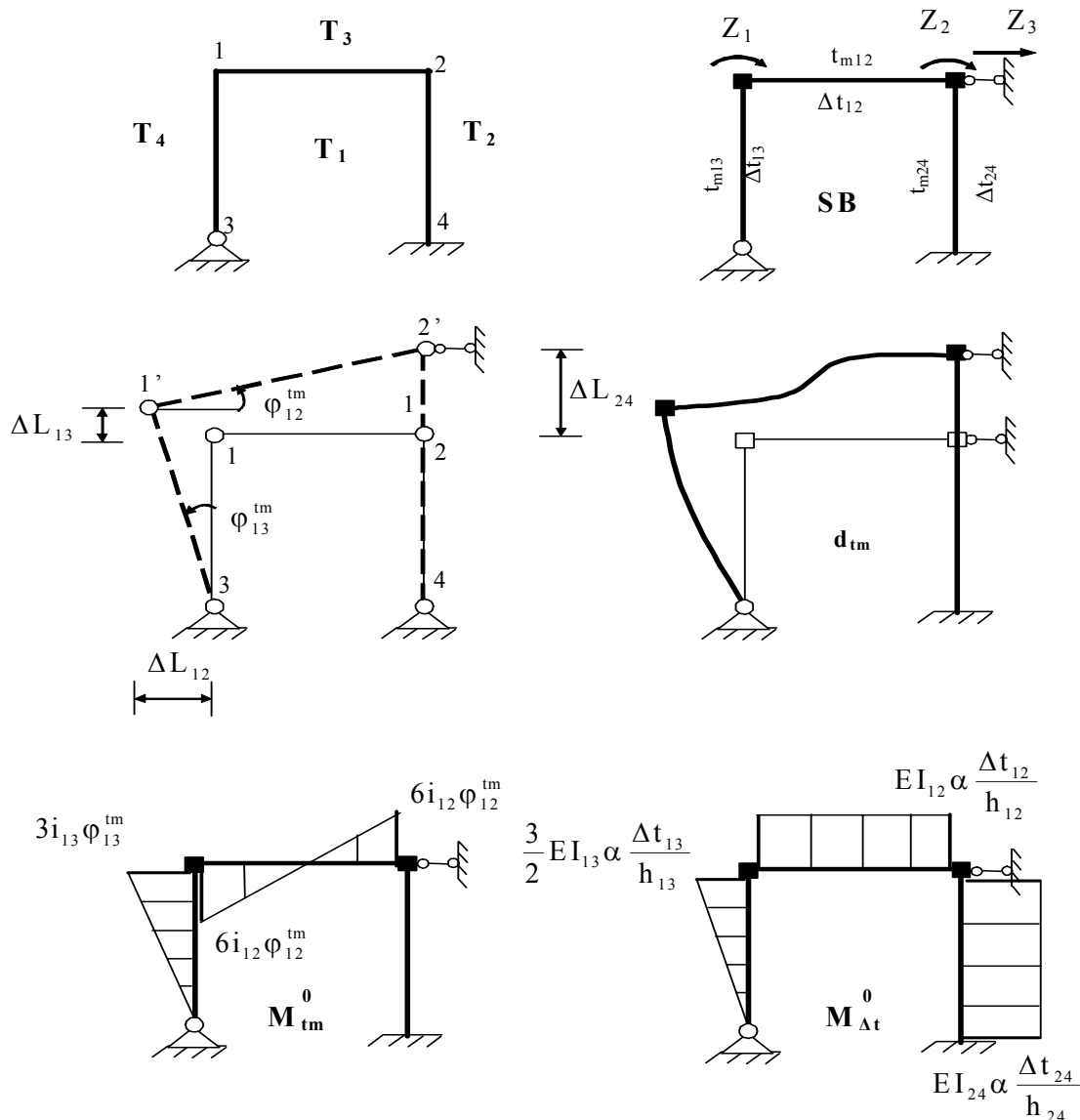
$$M_t^0 = M_{tm}^0 + M_{\Delta t}^0 \quad (4.34)$$

unde M_{tm}^0 reprezintă efectul temperaturii medii, iar $M_{\Delta t}^0$ efectul diferenței de temperatură.

Pentru exemplificarea modului de rezolvare a unei structuri la acțiunea variației de temperatură se consideră cadrul din figura 4.39. Se consideră $T_1 > T_2 > T_3 > T_4 > 0$.

Efectul temperaturii medii. Temperatura medie din axele barelor provoacă (prin modificarea lungimilor acestora) deformarea sistemului de bază. Pentru determinarea momentelor încovoietoare de la capetele barelor trebuie calculate rotirile acestora. În acest sens se studiază modul de deplasare al nodurilor structurii articulate. Calculul rotirilor barelor se realizează prin simple considerații geometrice, deoarece pentru fiecare bară variația lungimii este $\Delta L_{ij} = \alpha \cdot L_{ij} \cdot t_m$ (unde t_m reprezintă temperatura medie din axa barei ij).

$$\begin{aligned} \Delta L_{12} &= \alpha \cdot L_{12} \cdot t_{m12}; & \Delta L_{13} &= \alpha \cdot L_{13} \cdot t_{m13}; & \Delta L_{24} &= \alpha \cdot L_{24} \cdot t_{m24} \\ \varphi_{12}^{tm} &= \frac{\Delta L_{24} - \Delta L_{13}}{L_{12}}; & \varphi_{13}^{tm} &= \frac{\Delta L_{12}}{L_{13}}; & \varphi_{24}^{tm} &= 0 \end{aligned}$$



- Fig.4.39 -

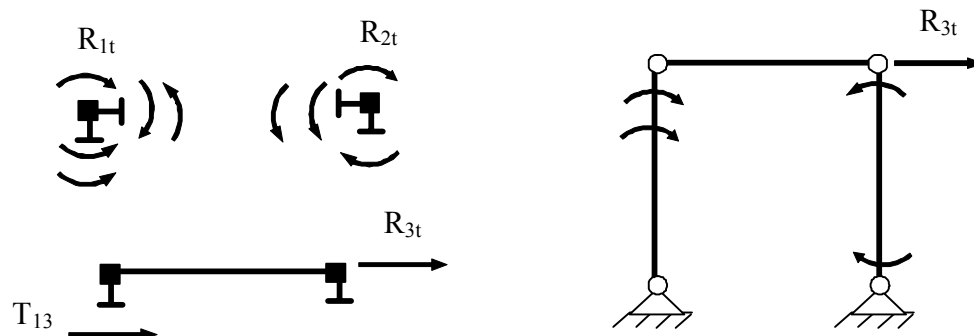
Efectul diferenței de temperatură. Diagrama $M_{\Delta t}^0$ se obține imediat deoarece pentru cele două tipuri de bare se cunosc expresiile momentelor de încastrare perfectă (vezi exemplul 3.8):

$$M_{ij} = -M_{ji} = EI_{ij} \alpha \frac{\Delta t_{ij}}{h_{ij}}$$

$$M_{ik} = \frac{3}{2} EI_{ik} \alpha \frac{\Delta t_{ik}}{h_{ik}}$$

Diagramele se desenează de partea fibrei mai reci (fig. 4.39).

Pentru calculul termenilor liberi se consideră ambele diagrame. În figura 4.40 sunt reprezentate elementele pentru calculul termenilor liberi.



- Fig.4.40 -

Reacțiunile din blocajul de nod se calculează din echilibrul de nod ($\sum M_i = 0$), respectiv

$$R_{1t} + EI_{12}\alpha \frac{\Delta t_{12}}{h_{12}} - 6i_{12}\psi_{12}^{tm} - \frac{3}{2}EI_{13}\alpha \frac{\Delta t_{13}}{h_{13}} - 3i_{13}\psi_{13}^{tm} = 0$$

$$R_{2t} - EI_{12}\alpha \frac{\Delta t_{12}}{h_{12}} - 6i_{12}\phi_{12}^{tm} + EI_{24}\alpha \frac{\Delta t_{24}}{h_{24}} = 0$$

Reacțiunea din legătura de grad de libertate se determină din ecuația de proiecție pe orizontală (în cazul de față structura reală este cu stâlpi verticali)

$$\sum X_i = 0; \quad R_{3t} + T_{13} = 0$$

unde

$$T_{13} = \frac{3}{2}EI_{13}\alpha \frac{\Delta t_{13}}{h_{13}} \cdot \frac{1}{L_{13}} + 3i_{13}\psi_{13}^{tm} \cdot \frac{1}{L_{13}}$$

sau utilizând principiul lucrului mecanic virtual (pe structura articulată a structurii reale).

$$\delta L = 0; \quad R_{13} \cdot 1 + \frac{3}{2}EI_{13}\alpha \frac{\Delta t_{13}}{h_{13}} \cdot \frac{1}{L_{13}} + 3i_{13}\phi_{13}^{tm} \cdot \frac{1}{L_{13}} = 0$$

Observație: În cazul de față, deoarece momentele încovoietoare de pe stâlpul 2-4 sunt egale și de sens contrar, ele nu intervin în calculul reacțiunii R_{3t} .

După rezolvarea sistemului de ecuații (4.32), momentul încovoietor într-o secțiune curentă se obține prin suprapunere de efecte, respectiv

$$M_t = M_t^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \dots + m_n Z_n \quad (4.35)$$

unde M_t^0 are expresia (4.34)

EXEMPLUL 4.9 Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 4.41. Se consideră $EI=10^5 \text{ kNm}^2$, $\alpha=10^{-5} \text{ grad}^{-1}$, iar înălțimea secțiunilor transversale ale barelor sunt: pentru rigle $h_r=60\text{cm}$, iar pentru stâlpi $h_s=40\text{cm}$.

Structura este aceeași cu cea de la exemplul 2.3, care a fost rezolvată prin metoda eforturilor.

În metoda deplasărilor, structura este cu noduri deplasabile și comportă 3 necunoscute (rotirile celor două noduri rigide și translația pe orizontală la nivelul riglei).

Sistemul ecuațiilor de condiție este:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1t} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2t} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3t} = 0 \end{cases}$$

Calculul rigidităților practice ale barelor:

$$i_{12} = i_{34} = \frac{EI}{3} = 0,333EI; \quad i_{23} = \frac{3EI}{8} = 0,375EI; \quad i_{35} = \frac{3EI}{4} = 0,75EI$$

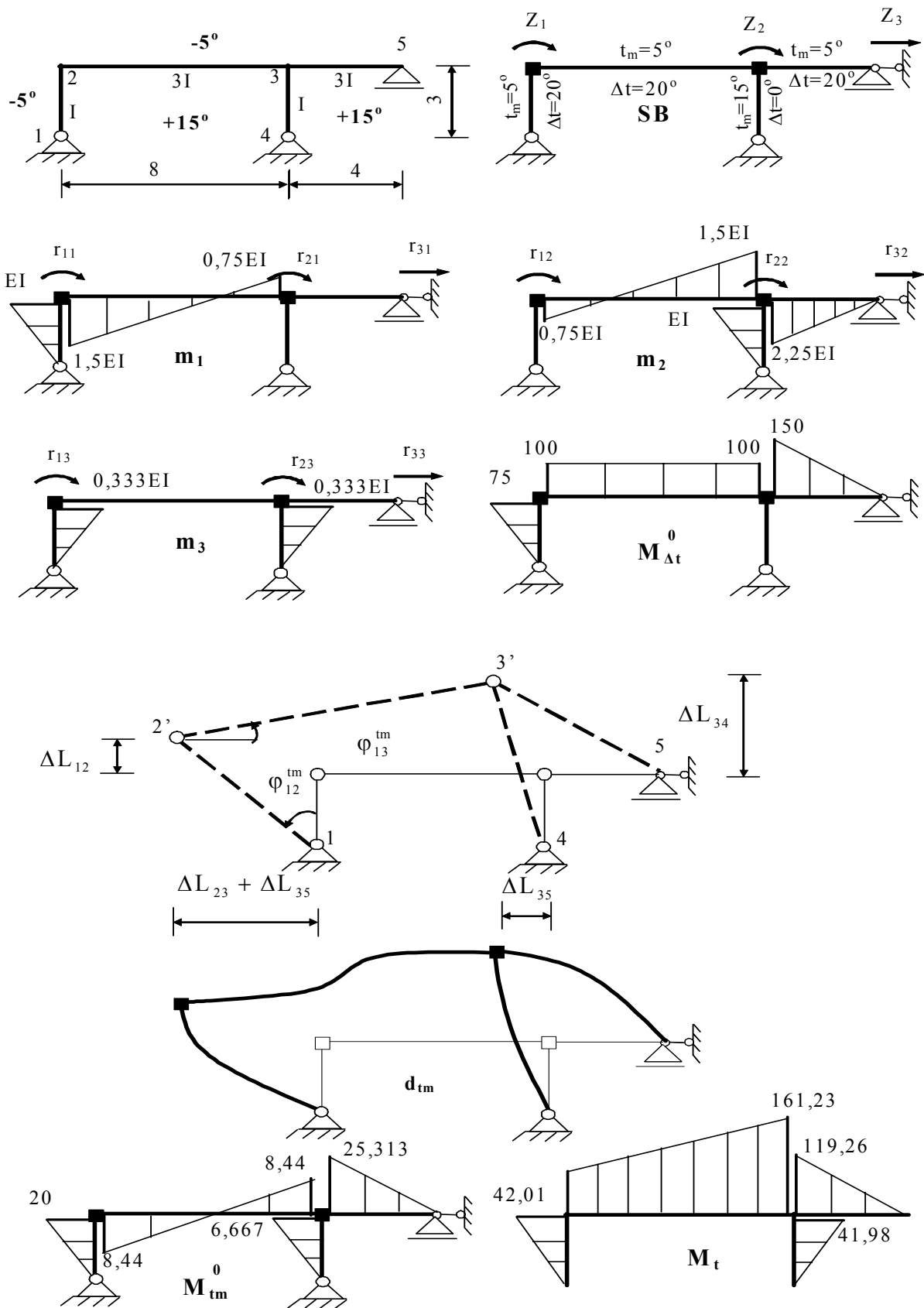
Deoarece sistemul de bază este static nedeterminat, în această metodă există diagramă de momente încovoietoare produse de variația de temperatură $M_t^0 = M_{tm}^0 + M_{\Delta t}^0$.

Diagrama $M_{\Delta t}^0$ se obține ușor, deoarece se regăsesc cele două diagrame tip, respectiv

$$M_{21}^{\Delta t} = \frac{3}{2}EI_{12}\alpha \frac{\Delta t_{12}}{h_{12}} = \frac{3}{2} \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{20}{0,40} = 75\text{kNm}$$

$$M_{23}^{\Delta t} = M_{32}^{\Delta t} = EI_{23}\alpha \frac{\Delta t_{23}}{h_{23}} = 3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{20}{0,60} = 100\text{kNm}$$

$$M_{35}^{\Delta t} = \frac{3}{2}EI_{35}\alpha \frac{\Delta t_{35}}{h_{35}} = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{20}{0,60} = 150\text{kNm}$$



- Fig.4.41 -

Pentru a determina efectul temperaturii medii este necesar studiul structurii auxiliare supuse variației lungimii barelor sub acțiunea acestei temperaturi

$$\Delta L_{12} = \alpha \cdot t_{m12} \cdot L_{12} = \alpha \cdot 5 \cdot 3 = 15\alpha$$

$$\Delta L_{23} = \alpha \cdot t_{m23} \cdot L_{23} = \alpha \cdot 5 \cdot 8 = 40\alpha$$

$$\Delta L_{34} = \alpha \cdot t_{m34} \cdot L_{34} = \alpha \cdot 15 \cdot 3 = 45\alpha$$

$$\Delta L_{35} = \alpha \cdot t_{m35} \cdot L_{35} = \alpha \cdot 5 \cdot 4 = 20\alpha$$

Cu aceste alungiri ale barelor se stabilește noua poziție a nodurilor și rotirile barelor, cu care se calculează momentele încovoietoare.

Unghiurile de rotire ale barelor sunt:

$$\psi_{12}^{t_m} = \frac{\Delta l_{23} + \Delta l_{35}}{L_{12}} = \frac{40\alpha + 20\alpha}{3} = 20\alpha;$$

$$\psi_{34}^{t_m} = \frac{\Delta l_{35}}{L_{34}} = \frac{20}{3}\alpha$$

$$\psi_{23}^{t_m} = \frac{\Delta l_{34} - \Delta l_{12}}{L_{23}} = \frac{45\alpha - 15\alpha}{8} = \frac{30}{8}\alpha;$$

$$\psi_{35}^{t_m} = \frac{\Delta l_{34}}{L_{35}} = \frac{45\alpha}{4} = 11,25\alpha$$

Momentele încovoietoare produse de temperatura medie sunt

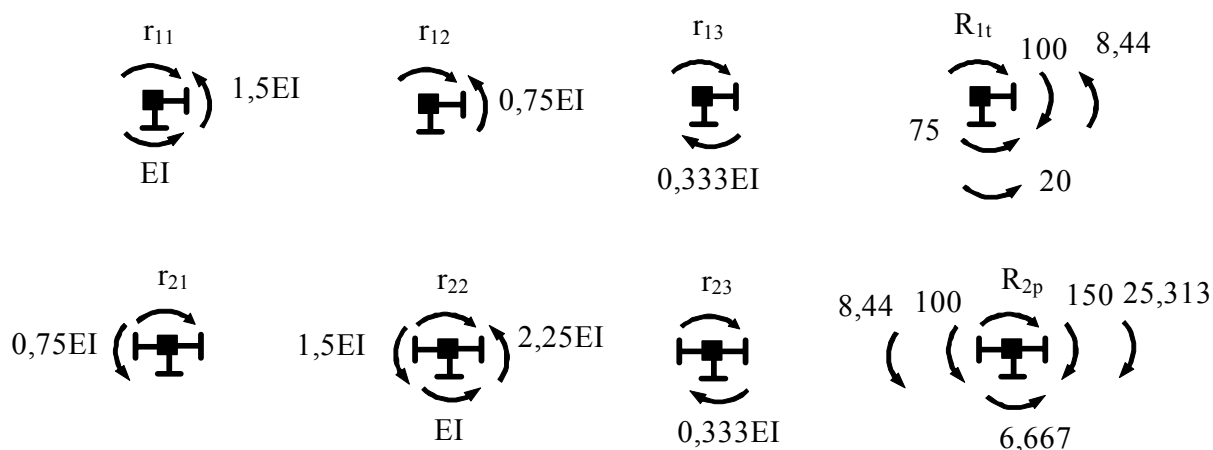
$$M_{21}^{t_m} = 3i_{12}\psi_{12}^{t_m} = 3 \cdot 0,333 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-5} = 20\text{kNm}$$

$$M_{23}^{t_m} = M_{32}^{t_m} = 6i_{23}\psi_{23}^{t_m} = 6 \cdot 0,375 \cdot 10^5 \cdot \frac{30}{8} \cdot 10^{-5} = 8,44\text{kNm}$$

$$M_{35}^{t_m} = 3i_{35}\psi_{35}^{t_m} = 3 \cdot 0,75 \cdot 10^5 \cdot 11,25 \cdot 10^{-5} = 25,313\text{kNm}$$

$$M_{34}^{t_m} = 3i_{34}\psi_{34}^{t_m} = 3 \cdot 0,333 \cdot 10^5 \cdot \frac{20}{3} \cdot 10^{-5} = 6,667\text{kNm}$$

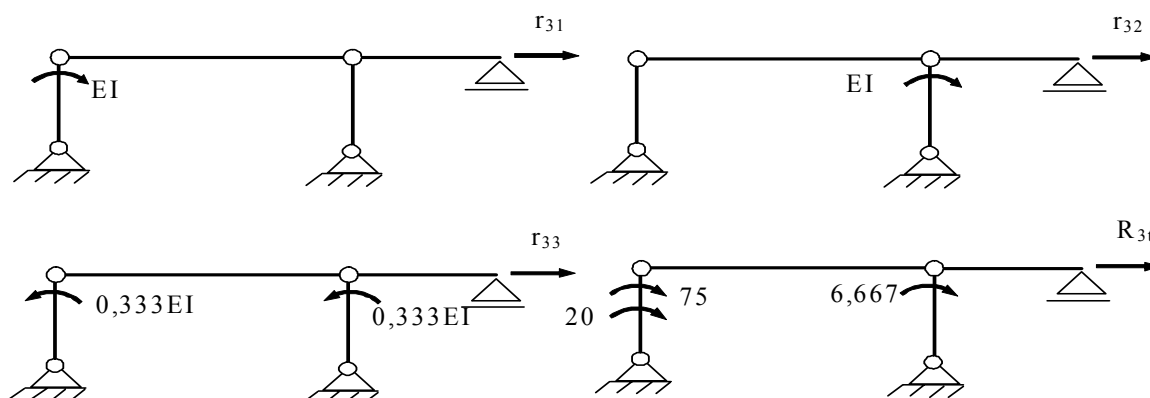
Reacțiunile din blocajele de nod (fig.4.42) sunt:



- Fig.4.42 -

$$\begin{array}{llll} r_{11} = 2,5EI; & r_{12} = 0,75EI; & r_{13} = -0,333EI; & R_{1t} = 3,44 \\ r_{21} = 0,75EI; & r_{22} = 4,75EI; & r_{23} = -0,333EI; & R_{2t} = -60,206 \end{array}$$

Reacțiunile din legătura de grad de libertate (fig.4.43) sunt:



- Fig.4.43 -

$$\begin{array}{ll} r_{31} \cdot 1 + EI \cdot \frac{1}{3} = 0; & r_{31} = -0,333EI \\ r_{32} \cdot 1 + EI \cdot \frac{1}{3} = 0; & r_{32} = -0,333EI \\ r_{33} \cdot 1 - 0,333EI \cdot \frac{1}{3} - 0,333EI \cdot \frac{1}{3} = 0; & r_{33} = 0,222EI \\ R_{3t} \cdot 1 + (75 + 20) \cdot \frac{1}{3} + 6,667 \cdot \frac{1}{3} = 0; & R_{3t} = -33,889; \end{array}$$

Sistemul de ecuații are forma

$$\begin{cases} 2,5EI \cdot Z_1 + 0,75EI \cdot Z_2 - 0,333EI \cdot Z_3 + 3,44 = 0 \\ 0,75EI \cdot Z_1 + 4,75EI \cdot Z_2 - 0,333EI \cdot Z_3 - 60,206 = 0 \\ -0,333EI \cdot Z_1 - 0,333EI \cdot Z_2 + 0,222EI \cdot Z_3 - 33,889 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele $Z_1 = 20,571/EI$, $Z_2 = 24,911/EI$ și $Z_3 = 220,878/EI$

Diagrama de momente încovoietoare calculată cu relația

$$M_t = M_t^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + m_3 Z_3$$

este dată în figura 4.41.

Se constată că diagrama de moment încovoietor este identică cu cea obținută în exemplul 2.3 rezolvat utilizând metoda eforturilor.

4.5. Efectul cedărilor de reazeme

Datorită cedărilor de reazem, barele sistemului de bază se deformează prin rotire de nod și/sau rotire de bară și în consecință vor apărea eforturi. Rotirile de bară se calculează pentru fiecare cedare de reazem în parte din condiții geometrice. În acest sens se studiază modul de deplasare al nodurilor structurii articulate la care s-a eliberat legătura pe direcția cedării de reazem respective. În cazul structurilor cu noduri deplasabile se menține și legătura de grad de libertate. Momentele de încastrare perfectă care apar în diagrama M_{Δ}^0 se determină utilizând relațiile (4.20-4.22) și (4.24-4.25)

Pentru rezolvarea prin metoda deplasărilor a structurilor la acțiunea cedărilor de reazeme, sistemul ecuațiilor de condiție devine:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1\Delta} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2\Delta} = 0 \\ \vdots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{n\Delta} = 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

unde termenii liberi, de forma $R_{i\Delta}$, reprezintă reacțiunile din legăturile suplimentare datorită cedărilor de reazeme.

Calculul termenilor liberi din sistemul de ecuații (4.36) se conduce după regulile cunoscute.

După rezolvarea sistemului de ecuații (4.36), momentul încovoietor într-o secțiune curentă se obține prin suprapunere de efecte, respectiv

$$M_{\Delta} = M_{\Delta}^0 + m_1Z_1 + m_2Z_2 + \dots + m_nZ_n \quad (4.37)$$

EXEMPLUL 4.10. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 4.44 supusă acțiunii cedărilor de reazeme. Se consideră $EI=10^5 \text{ kNm}^2$, $\Delta u=1,2\text{cm}$, $\Delta v=1,5\text{cm}$.

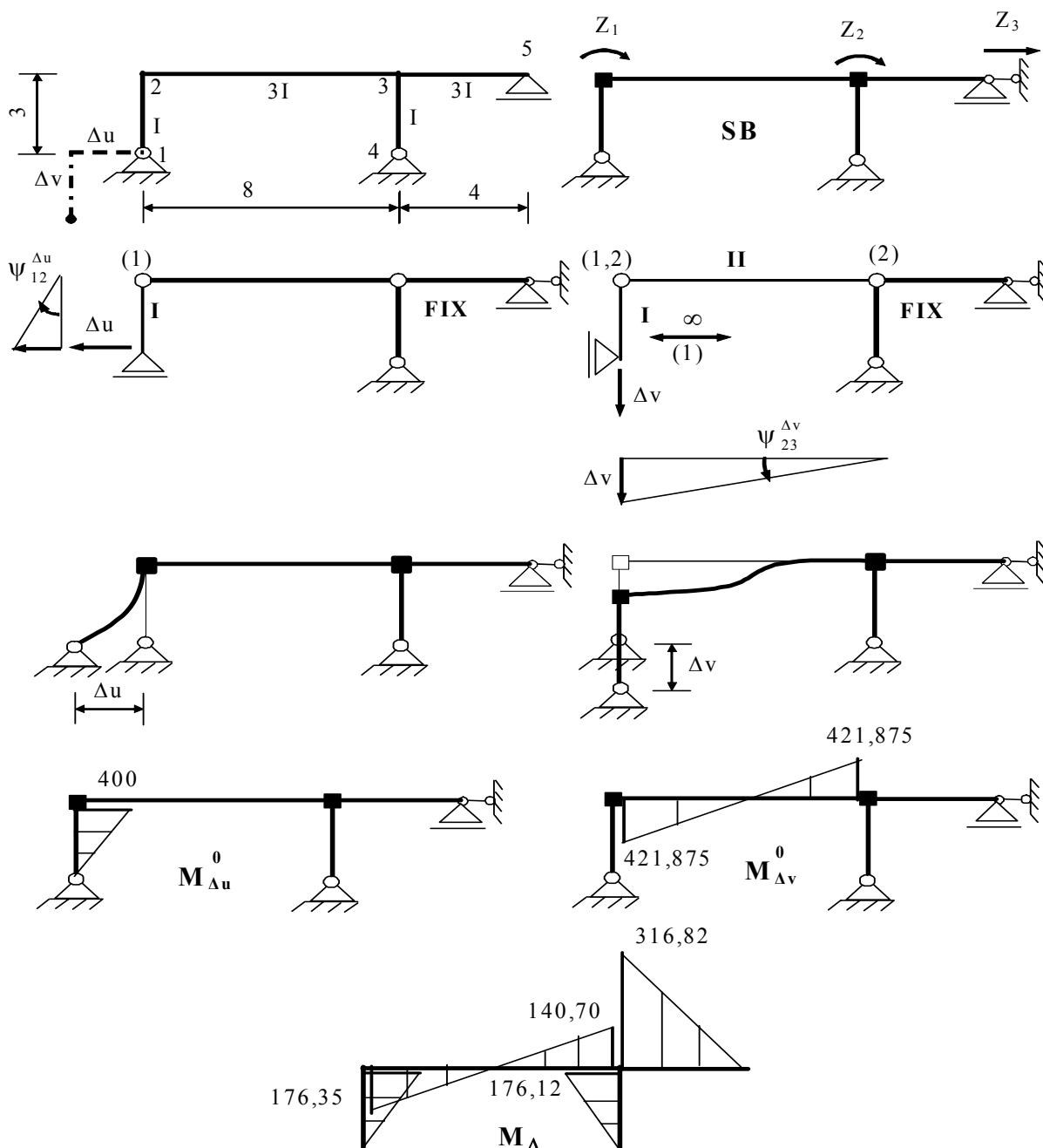
Structura este aceeași cu cea de la exemplul precedent. Sistemul ecuațiilor de condiție are forma

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1\Delta} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2\Delta} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3\Delta} = 0 \end{cases}$$

Deoarece sistemul de bază este static nedeterminat cedările de reazeme vor produce eforturi, respectiv

$$M_{\Delta}^0 = M_{\Delta u}^0 + M_{\Delta v}^0.$$

unde $M_{\Delta u}^0$ este produsă de cedarea de reazem Δu , iar $M_{\Delta v}^0$ este produsă de cedarea de reazem Δv .



- Fig.4.44 -

Este de preferat să se analizeze separat efectul fiecărei cedări de reazem.

Astfel pentru cedarea de reazem Δu , se analizează structura articulată la care s-a eliminat legătura pe cedării de reazem, menținându-se legătura de grad de libertate. Mecanismul este format dintr-o singură bară, stâlpul 1-2, pentru care rotirea de bară este

$$\psi_{12}^{\Delta u} = \frac{\Delta u}{L_{12}} = \frac{0,012}{3} = 4 \cdot 10^{-3}$$

iar momentele de încastrare perfectă sunt

$$\mathbf{M}_{21}^{\Delta u} = 3i_{12}\psi_{12}^{\Delta u} = 3 \cdot 0,333 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 400 \text{ kNm}$$

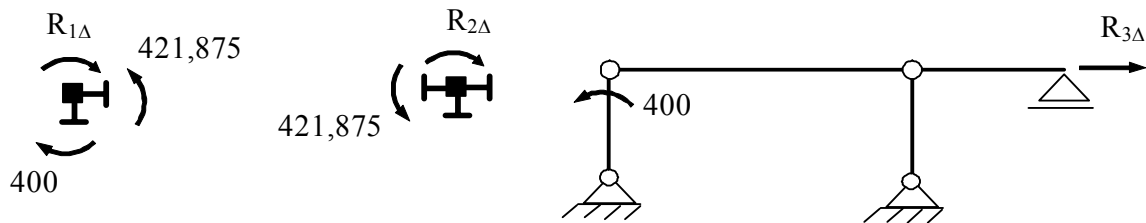
Pentru cedarea de rezem Δv , se analizează structura articulată la care s-a eliminat legătura pe direcția cedării de reazem, menținându-se legătura de grad de libertate. Mecanismul este format din două bare: stâlpul 1-2 și rigla 2-3. Stâlpul se translatează pe verticală, iar rigla se rotește cu unghiul

$$\psi_{23}^{\Delta v} = \frac{\Delta v}{L_{23}} = \frac{0,015}{8} = 1,875 \cdot 10^{-3}$$

Momentele de încastrare perfectă sunt

$$\mathbf{M}_{23}^{\Delta v} = \mathbf{M}_{32}^{\Delta v} = 6i_{23}\psi_{23}^{\Delta v} = 6 \cdot 0,375 \cdot 10^5 \cdot 1,875 \cdot 10^{-3} = 421,875 \text{ kNm}$$

Calculul termenilor liberi (fig.4.45)



- Fig.4.45 -

$$R_{1\Delta} - 421,875 + 400 = 0;$$

$$R_{1\Delta} = 21,875$$

$$R_{2\Delta} + 421,875 = 0;$$

$$R_{2\Delta} = -421,875$$

$$R_{3\Delta} \cdot 1 - 400 \cdot \frac{1}{3} = 0;$$

$$R_{3\Delta} = 133,333$$

Sistemul de ecuații are forma

$$\begin{cases} 2,5EI \cdot Z_1 + 0,75EI \cdot Z_2 - 0,333EI \cdot Z_3 + 21,875 = 0 \\ 0,75EI \cdot Z_1 + 4,75EI \cdot Z_2 - 0,333EI \cdot Z_3 - 421,875 = 0 \\ -0,333EI \cdot Z_1 - 0,333EI \cdot Z_2 + 0,222EI \cdot Z_3 + 133,333 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele $Z_1 = -93,278/EI$, $Z_2 = -140,809/EI$ și $Z_3 = -951,731/EI$

Diagrama de momente încovoietoare calculată cu relația

$$\mathbf{M}_{\Delta} = \mathbf{M}_{\Delta}^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + m_3 Z_3$$

este dată în figura 4.44.

Se constată că au fost obținute aceleași valori ca și în cazul rezolvării prin metoda eforturilor (exemplul 2.4).

CAPITOLUL V

APLICATII ALE METODEI DEPLASARILOR. CALCULUL STRUCTURILOR PRIN APROXIMAȚII SUCESIVE

Calculul structurilor prin cele două metode generale, metoda eforturilor și metoda deplasărilor, necesită alcătuirea și rezolvarea unui sistem de ecuații, operații care implică un consum mare de timp, în cazul structurilor cu număr mare de necunoscute.

Din această cauză, s-au căutat alte căi pentru calculul structurilor, fără a rezolva direct sistemul de ecuații. Modalitatea de rezolvare o constituie utilizarea aproximațiilor succesive.

Se știe, din calcul matriceal, că un sistem de ecuații liniare, a cărui matrice a coeficienților necunoscutelor este simetrică față de diagonala principală și pozitiv definită (determinantul principal este pozitiv), are întotdeauna asigurată convergența procesului iterativ dacă se folosește rezolvarea succesivă a ecuațiilor. Sistemele de ecuații care apar în problemele Staticii Construcțiilor respectă aceste cerințe.

Dar pentru asigurarea rapidității convergenței este necesară satisfacerea unor condiții restrictive. De aceea se utilizează criteriul lui Wittmeyer, pe baza căruia în fiecare ecuație trebuie respectată inegalitatea

$$r_{ii} > \sum_{j=1}^n |r_{ij}| \quad (i \neq j) \quad (5.1)$$

adică valoarea coeficientului principal să fie mai mare decât suma valorilor absolute ale coeficienților secundari. Se obține o convergență cu atât mai bună cu cât inegalitatea este mai accentuată.

Acest criteriu este îndeplinit în bune condiții la structurile cu noduri fixe. La structurile cu noduri deplasabile, în ecuațiile de grad de libertate, această condiție nu mai este satisfăcută, dar pe ansamblul sistemului de ecuații condiția este satisfăcută ($\sum r_{ii} > \sum |r_{ij}|, i \neq j$). În consecință la structurile cu noduri deplasabile convergența procesului iterative există, dar este mai lentă.

Calculul static al structurilor prin aproximații succesive se conduce pe o schemă care se confundă cu schema geometrică a structurii. Astfel nu mai este necesar a se mai scrie sistemul de ecuații, rezolvarea efectuându-se în funcție de caracteristicile geometrice ale structurii și de încărcările exterioare.

Semnificația fizică a calculului prin aproximații successive - în metoda deplasărilor - este următoarea: are loc trecerea treptată de la sistemul de bază cu toate nodurile blocate, la structura reală. În acest capitol se vor prezenta

procedeele iterative pentru calculul structurilor cu noduri fixe și a structurilor cu noduri deplasabile.

5.1. Structuri cu noduri fixe

Procedeele de rezolvare a structurilor cu noduri fixe prin aproximații succesive sunt numeroase. Se pot aminti: procedeul iterării rotirilor, procedeul distribuirii și transmiterii momentelor (procedeul Cross), procedeul Dasek, procedeul Kani. În continuare se prezintă numai procedeul distribuirii și transmiterii momentelor, deoarece este cel mai des utilizat în practică.

5.1.1. Procedeul distribuirii și transmiterii momentelor (Procedeul Cross)

Această procedeu utilizează în operarea prin iterare momentele încovoietoare. Atât în schema de iterare cât și în calculul elementelor inițiale, rotirile nodurilor nu apar explicit, ci numai indirect prin efectul lor asupra barelor.

Procedeul a fost elaborată de Hardy Cross în 1932 și are la bază semnificația fizică a trecerii structurii din poziția cu toate nodurile blocate în poziția deformată reală. În sistemul de bază nodurile sunt blocate. În unele noduri sau în toate, sub acțiunea încărcărilor, apar momente de încastrare perfectă neechilibrate, capabile să producă rotirea nodurilor la deblocarea acestora. Cum calculul iterativ implică deblocarea succesivă a câte unui singur nod, problema se reduce la a analiza procesul de calcul necesar în cazul deblocării unui nod și apoi extinderea concluziilor pentru obținerea soluției la structurile cu mai multe noduri.

Fie structura cu noduri fixe din figura 5.1 la care se cunosc lungimile barelor, caracteristicile secțiunilor transversale și încărcările exterioare.

Sistemul de bază se obține prin introducerea unui blocaj de nod în nodul rigid. Ecuația de condiție este

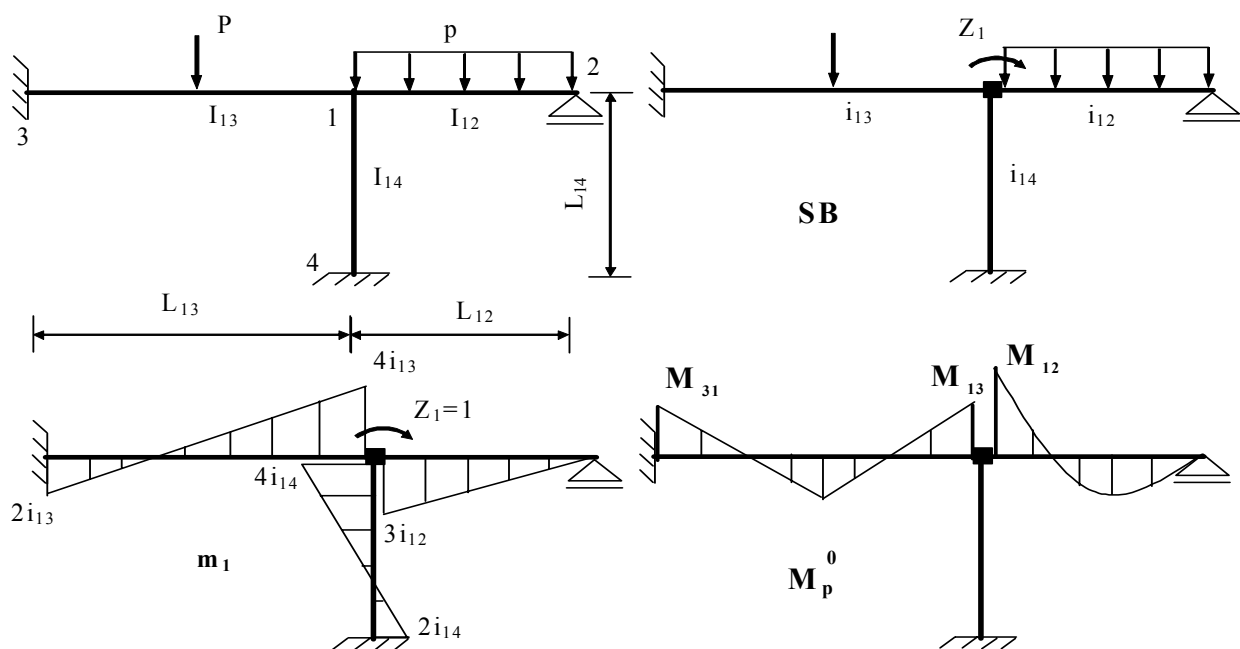
$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0 \quad (5.2)$$

Din încărcarea sistemului de bază cu rotirea $Z_1=1$ se obține diagrama unitară m_1 , iar din încărcarea cu forțele exterioare se obține diagrama M_p^0 . Se presupune că $M_{12} > M_{13}$.

Reacțiunea r_{11} se obține din echilibrul static al nodului 1, respectiv

$$r_{11} = 4i_{13} + 4i_{14} + 3i_{12} = 4i_0 \cdot \left(\frac{i_{13}}{i_0} + \frac{i_{14}}{i_0} + \frac{3}{4} \cdot \frac{i_{12}}{i_0} \right) \quad (5.3)$$

unde i_0 reprezintă o rigiditate practică de comparație, de exemplu $i_0=EI$.



- Fig.5.1 -

Notând $\rho_{13} = \frac{i_{13}}{i_0}$; $\rho_{14} = \frac{i_{14}}{i_0}$; $\rho_{12} = \frac{3}{4} \cdot \frac{i_{12}}{i_0}$ reacțiunea r_{11} se poate scrie sub forma

$$r_{11} = 4i_0(\rho_{13} + \rho_{14} + \rho_{12}) = 4i_0 \sum \rho_i \quad (5.4)$$

unde ρ_{13} , ρ_{14} și ρ_{12} reprezintă coeficienții de rigiditate ai barelor 1-3, 1-4 respectiv 1-2, iar $\sum \rho_i$ reprezintă suma coeficienților de rigiditate ai barelor ce formează nodul 1.

Termenul liber este

$$R_{1p} + M_{12} - M_{13} = 0 \quad (5.5)$$

sau notând $\bar{M}_1 = M_{12} - M_{13}$ - unde $\bar{M}_1$ reprezintă momentul neechilibrat din nodul 1, reacțiunea R_{1p} devine

$$R_{1p} = -\bar{M}_1 \quad (5.6)$$

Necunoscuta Z_1 capătă forma

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{\bar{M}_1}{4i_0 \sum \rho_i} \quad (5.7)$$

și reprezintă rotirea nodului 1, produsă de momentul neechilibrat $\bar{M}_1$, când nodul 1 este deblocat.

În această poziție, nodul 1 este în echilibru, iar momentele încovoietoare ce apar pe bare ținând cont de relațiile (4.26) și (4.27) sunt:

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= \mathbf{M}_{12} - 3i_{12}Z_1 = \mathbf{M}_{12} - 3i_{12} \cdot \frac{\bar{M}_1}{4i_0 \sum \rho_1} = \mathbf{M}_{12} + \mu_{12} \bar{M}_1 \\
 M_{14} &= -4i_{14}Z_1 = -4i_{14} \cdot \frac{\bar{M}_1}{4i_0 \sum \rho_1} = \mu_{14} \bar{M}_1 \\
 M_{41} &= -2i_{14}Z_1 = -2i_{14} \cdot \frac{\bar{M}_1}{4i_0 \sum \rho_1} = \frac{1}{2} \mu_{14} \bar{M}_1 \\
 M_{13} &= -\mathbf{M}_{13} - 4i_{13}Z_1 = -\mathbf{M}_{13} - 4i_{13} \cdot \frac{\bar{M}_1}{4i_0 \sum \rho_1} = -\mathbf{M}_{13} + \mu_{13} \bar{M}_1 \\
 M_{31} &= \mathbf{M}_{31} - 2i_{13}Z_1 = \mathbf{M}_{31} - 2i_{13} \cdot \frac{\bar{M}_1}{4i_0 \sum \rho_1} = \mathbf{M}_{31} + \frac{1}{2} \mu_{13} \bar{M}_1
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

unde μ_{12} , μ_{13} respectiv μ_{14} reprezintă coeficienții de rigiditate ai barelor 1-2, 1-3, respectiv 1-4 și au următoarele expresii:

$$\mu_{12} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_1}; \quad \mu_{13} = -\frac{\rho_{13}}{\sum \rho_1}; \quad \mu_{14} = -\frac{\rho_{14}}{\sum \rho_1} \tag{5.9}$$

Se remarcă faptul că suma coeficienților de distribuție dintr-un nod este egală cu minus unu, $\sum \mu_{ij} = -1$.

Această proprietate rezultă scriind echilibrul nodului 1

$$\begin{aligned}
 \sum M_1 &= 0; & M_{12} + M_{13} + M_{14} &= 0 \\
 \mathbf{M}_{12} + \mu_{12} \bar{M}_1 + \mu_{13} \bar{M}_1 - \mathbf{M}_{13} + \mu_{14} \bar{M}_1 &= 0
 \end{aligned}$$

Deoarece

$$\mathbf{M}_{12} - \mathbf{M}_{13} = \bar{M}_1$$

rezultă

$$\bar{M}_1 (\mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{14}) = -\bar{M}_1$$

sau

$$\mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{14} = -1 \tag{5.10}$$

În concluzie, prin rotirea nodului 1, sub acțiunea momentului neechilibrat $\bar{M}_1$, în secțiunile din nod ale barelor apar momente încovoietoare a căror valoare se determină prin distribuirea momentului neechilibrat, proporțional cu coeficientul de rigiditate al fiecărei bare, iar la capetele opuse ale barelor dublu încastrate se transmit momente egale cu jumătate din momentele distribuite și având același semn.

Această concluzie permite trecerea de la structura cu un singur nod rigid la structuri cu mai multe noduri rigide.

În vederea stabilirii elementelor necesare operației de rezolvare a unei structuri cu noduri fixe (fig.5.2,a) se parcurg următoarele etape:

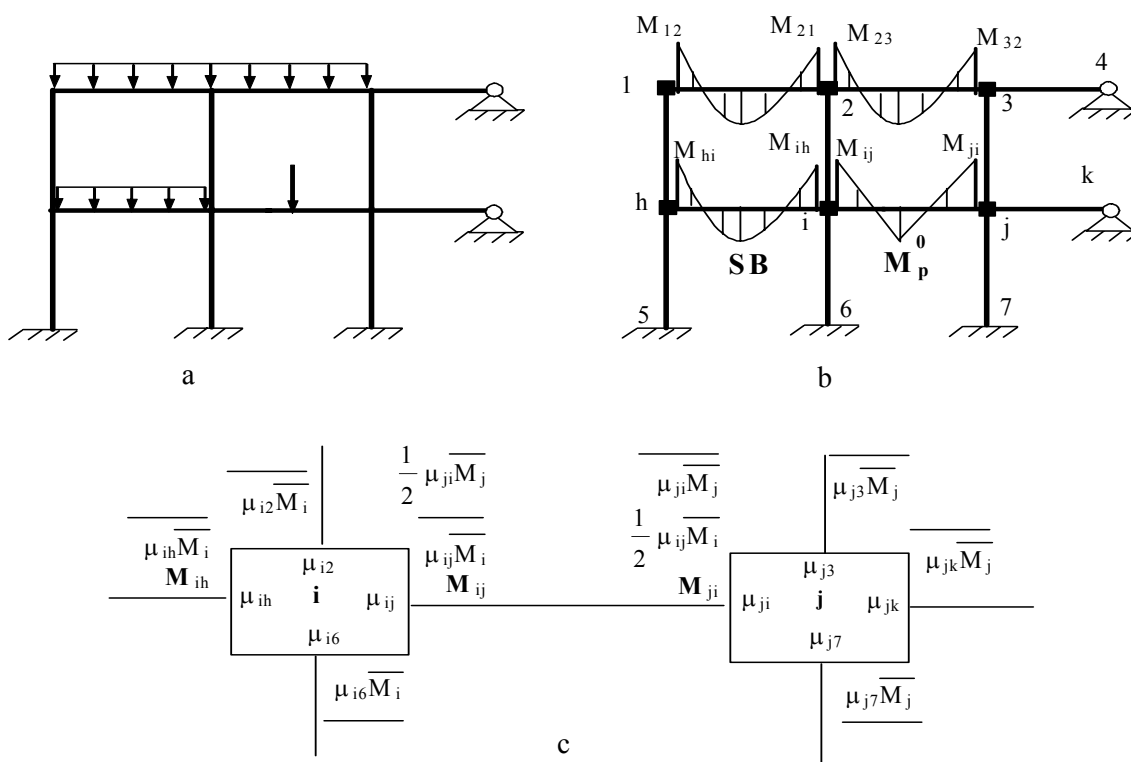
- se stabilește sistemul de bază prin blocarea tuturor nodurilor rigide (fig.5.2,b);

- se calculează coeficienții de rigiditate ai barelor ρ_{ij} , funcție de caracteristicile barelor - lungime, momente de inerție și tipul de legături la capete. Astfel pentru bara dublu încastrată $\rho_{ij} = \frac{i_{ij}}{i_0}$, iar pentru bara încastrată

articulată $\rho_{ik} = \frac{3}{4} \cdot \frac{i_{ik}}{i_0}$;

- se calculează suma coeficienților de rigiditate în fiecare nod $\Sigma \rho_i$;
- se calculează coeficienții de distribuție μ_{ij} în fiecare nod și pentru fiecare bară;

- se calculează momentele de încastrare perfectă M_{ij} ;
- se alcătuiește schema de calcul în vederea începerii operației de iterare (fig.5.2,c);



- Fig. 5.2 -

Pentru urmărirea cu ușurință a operației de iterare s-au considerat numai nodurile i și j . Operația de iterare reprezintă deblocarea succesivă a nodurilor și

înregistrarea efectelor rotirii acestora sub forma momentelor distribuite și transmise.

Se deblochează nodul i . Asupra acestui nod acționează momentul neechilibrat total $\bar{M}_i = \mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{ih}$, sub acțiunea căruia nodul se rotește și apoi rămâne în echilibru. Acum nodul se blochează la loc. Pe bare au apărut eforturi. În schema de iterare această fază se marchează prin distribuirea momentului neechilibrat $\bar{M}_i$ la toate barele din nod. Momentele distribuite sunt $\mu_{ij}\bar{M}_i$, $\mu_{ih}\bar{M}_i$, $\mu_{i2}\bar{M}_i$ și $\mu_{i6}\bar{M}_i$. Valorile astfel obținute se transmit jumătate la capetele opuse ale barelor dublu încastrate și se înscriu pe schemă. De exemplu la nodul j s-a transmis momentul $\frac{1}{2}\mu_{ij}\bar{M}_i$.

În schema de calcul, încheierea operațiilor de distribuție și transmitere ce urmează deblocării unui nod se marchează prin câte o bară orizontală, ceea ce înseamnă că nodul i este în echilibru, dar blocat.

Trecând la alt nod, de exemplu la nodul j , aici există un moment neechilibrat $\bar{M}_j = \mathbf{M}_{ji} + \frac{1}{2}\mu_{ij}\bar{M}_i$. Se deblochează nodul j . Sub acțiunea momentului neechilibrat $\bar{M}_j$ nodul se rotește și se oprește în echilibru, poziție în care se reblochează. Momentele ce apar pe barele nodului j se determină prin distribuirea momentului neechilibrat $\bar{M}_j$. Aceste momente sunt $\mu_{ji}\bar{M}_j$, $\mu_{jk}\bar{M}_j$, $\mu_{j3}\bar{M}_j$ și $\mu_{j7}\bar{M}_j$, valorile lor înscriindu-se la capetele barelor. Urmează transmiterea momentelor distribuite la capetele opuse. De exemplu la nodul i s-a transmis momentul $\frac{1}{2}\mu_{ji}\bar{M}_j$. Se barează în nodul j coloanele de valori ce marchează sfârșitul operațiilor de distribuție și transmitere ca urmare a deblocării acestui nod.

Trecând succesiv de la un nod la altul se repetă ciclul celor două operații, distribuie și transmitere, până când valorile momentelor încovoietoare cu care ar trebui reluat ciclul sunt mici în comparație cu valorile inițiale. Această situație corespunde poziției reale de echilibru a structurii, deci blocajele de nod pot fi îndepărtate. Însușind valorile obținute în fiecare coloană se capătă momentele finale în secțiunile de la capetele barelor.

Observații:

1) Deoarece în acest procedeu se operează cu eforturi și condiția de echilibru static este respectată atât la fiecare deblocare cât și în final, verificarea rezultatelor se obține verificând satisfacerea condiției de compatibilitate a deformatelor cu legăturile. Având momentele încovoietoare finale se calculează rotirile secțiunilor din jurul unui nod – rotiri care trebuie să fie egale.

Astfel pentru o bară situată între două noduri rigide i și j expresiile momentelor încovoietoare sunt:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \mathbf{M}_{ij} - 4\rho_{ij}\theta_i - 2\rho_{ij}\theta_j \\ M_{ji} &= \mathbf{M}_{ji} - 2\rho_{ij}\theta_i - 4\rho_{ij}\theta_j \end{aligned} \quad (5.11)$$

Deoarece M_{ij} și M_{ji} sunt momentele încovoietoare finale rezultă un sistem de două ecuații cu două necunoscute θ_i și θ_j .

Notând $M_{ij}^* = M_{ij} - \mathbf{M}_{ij}$ și $M_{ji}^* = M_{ji} - \mathbf{M}_{ji}$ rotirile capătă forma

$$\theta_i = \frac{M_{ji}^* - 2M_{ij}^*}{6\rho_{ij}} \text{ și } \theta_j = \frac{M_{ij}^* - 2M_{ji}^*}{6\rho_{ij}} \quad (5.12)$$

Pentru o bară încastrată la capătul i și articulată în k expresia momentului încovoietor M_{ik} este

$$M_{ik} = \mathbf{M}_{ik} - 3i_{ik}\theta_i = \mathbf{M}_{ik} - 4\rho_{ik}\theta_i \quad (5.13)$$

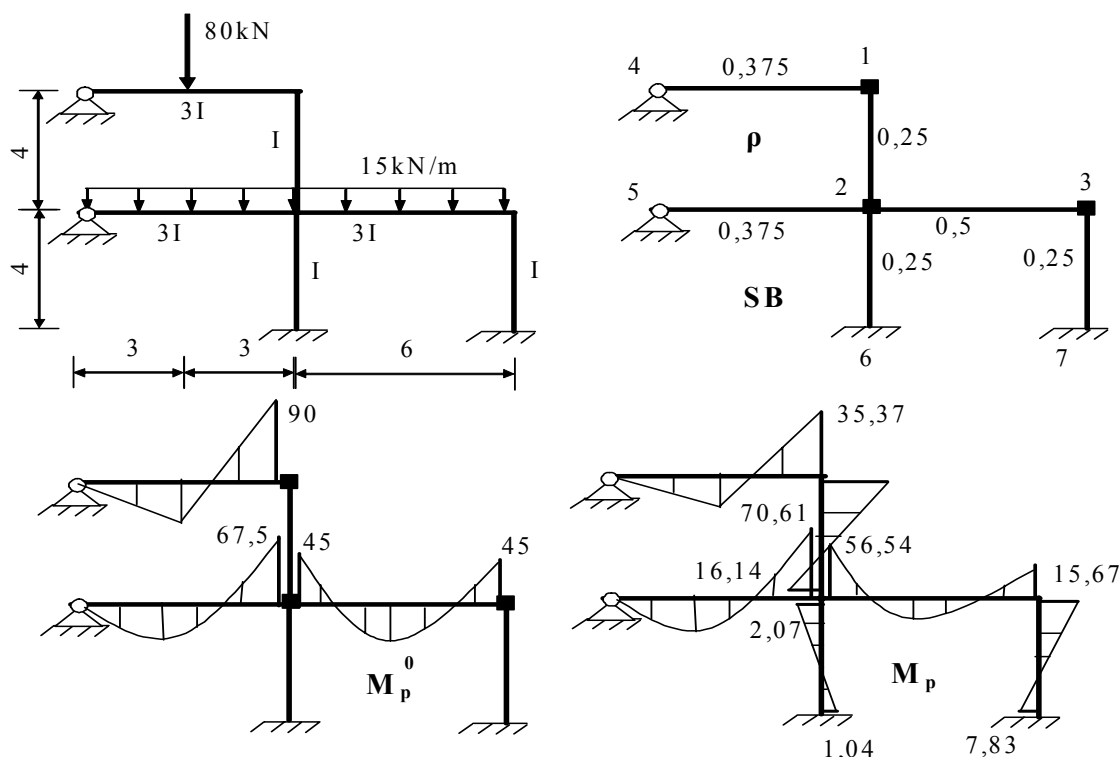
Notând $M_{ik}^* = M_{ik} - \mathbf{M}_{ik}$, rotirea secțiunii i este

$$\theta_i = \frac{M_{ik}^*}{4\rho_{ik}} \quad (5.14)$$

2) La structurile simetrice – la care calculul se conduce pe semistructură trebuie avut în vedere următoarele:

- dacă axa de simetrie intersectează o bară la mijlocul deschiderii atunci în cazul încărcării simetrice se consideră $\rho_{1s} = \frac{1}{2}\rho_{ij}$, iar în cazul încărcării antisimetrice se consideră $\rho_{1s} = 1,5\rho_{ij}$
- dacă axa de simetrie se suprapune peste axa unei bare atunci în cazul încărcării antisimetrice se consideră $\rho_{ij}^{as} = \frac{1}{2}\rho_{ij}$.

Exemplul 5.1 Să se traseze diagrama de moment încovoietor la cadrul din figura 5.3, utilizând procedeul distribuirii și transmiterii momentelor.



- Fig.5.3 -

Calculul rigidităților practice și al coeficienților de rigiditate ai barelor

Pentru $i_0 = EI$ se obține

$$i_{12} = \frac{EI}{4} = 0,25EI;$$

$$i_{14} = \frac{3EI}{6} = 0,5EI;$$

$$i_{23} = \frac{3EI}{6} = 0,5EI;$$

$$i_{26} = \frac{EI}{4} = 0,25EI;$$

$$i_{25} = \frac{3EI}{6} = 0,5EI;$$

$$i_{37} = \frac{EI}{4} = 0,25EI;$$

$$\rho_{12} = \frac{i_{12}}{i_0} = 0,25$$

$$\rho_{14} = \frac{3}{4} \cdot \frac{i_{14}}{i_0} = 0,375$$

$$\rho_{23} = \frac{i_{23}}{i_0} = 0,5$$

$$\rho_{26} = \frac{i_{26}}{i_0} = 0,25$$

$$\rho_{25} = \frac{3}{4} \cdot \frac{i_{25}}{i_0} = 0,375$$

$$\rho_{37} = \frac{i_{37}}{i_0} = 0,25$$

Calculul coeficienților de distribuție

Nodul 1

$$\sum \rho_1 = \rho_{14} + \rho_{12} = 0,25 + 0,375 = 0,625$$

$$\mu_{12} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_1} = -\frac{0,25}{0,625} = -0,400$$

$$\mu_{14} = -\frac{\rho_{14}}{\sum \rho_1} = -\frac{0,375}{0,625} = -0,600$$

Nodul 2

$$\sum \rho_2 = \rho_{12} + \rho_{25} + \rho_{26} + \rho_{23} = 0,25 + 0,375 + 0,25 + 0,5 = 1,375$$

$$\mu_{21} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,25}{1,375} = -0,182$$

$$\mu_{25} = -\frac{\rho_{25}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,375}{1,375} = -0,272$$

$$\mu_{26} = -\frac{\rho_{26}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,25}{1,375} = -0,182$$

$$\mu_{23} = -\frac{\rho_{23}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,5}{1,375} = -0,364$$

Nodul 3

$$\sum \rho_3 = \rho_{23} + \rho_{37} = 0,5 + 0,25 = 0,75$$

$$\mu_{32} = -\frac{\rho_{23}}{\sum \rho_3} = -\frac{0,5}{0,75} = -0,667$$

$$\mu_{37} = -\frac{\rho_{37}}{\sum \rho_3} = -\frac{0,25}{0,75} = -0,333$$

Calculul momentelor de încastrare perfectă

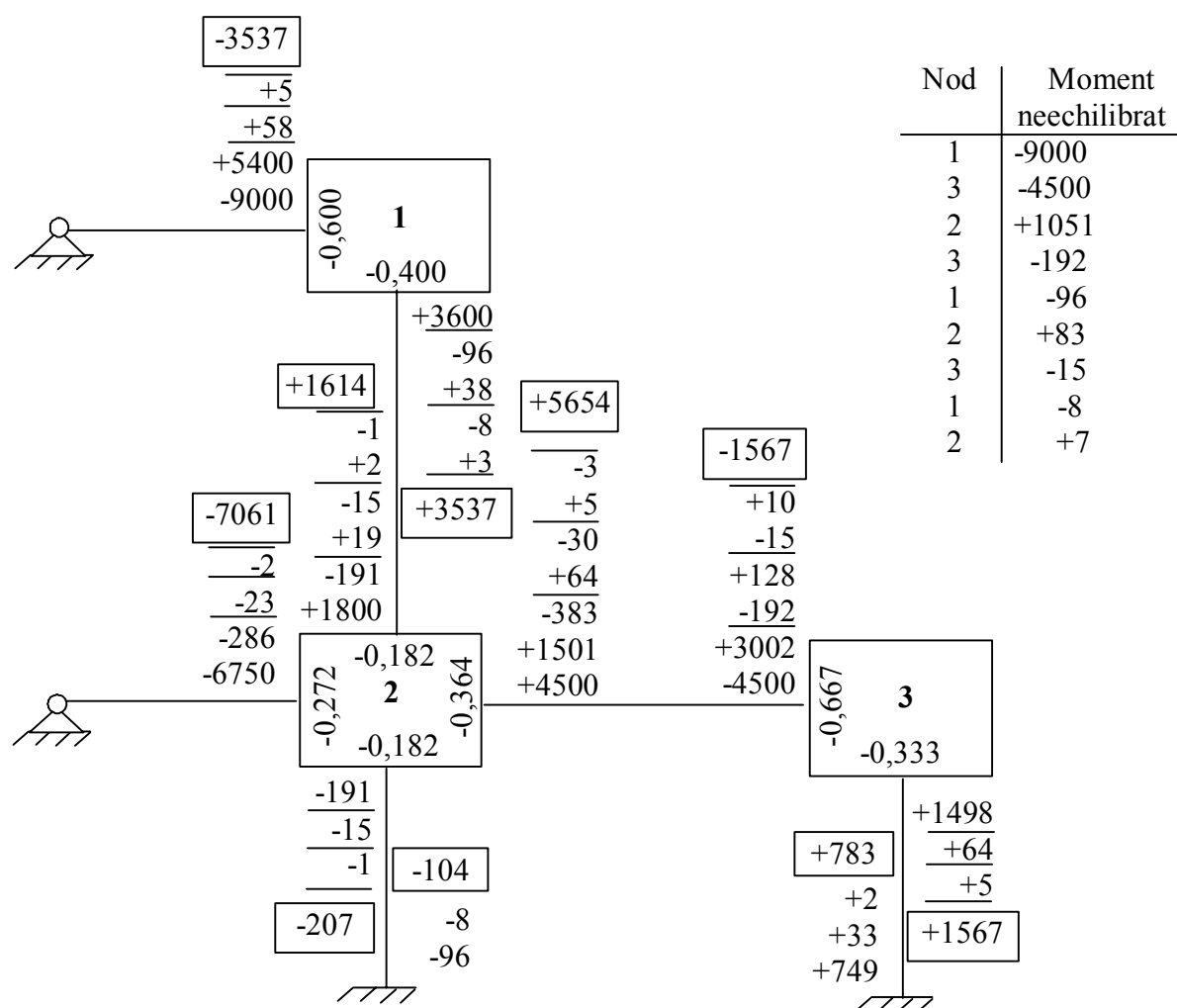
$$\mathbf{M}_{14} = \frac{3PL}{16} = \frac{3 \cdot 80 \cdot 6}{16} = 90 \text{ kNm}$$

$$\mathbf{M}_{23} = \mathbf{M}_{32} = \frac{pL^2}{12} = \frac{15 \cdot 6^2}{12} = 45 \text{ kNm}$$

$$\mathbf{M}_{25} = \frac{pL^2}{8} = \frac{15 \cdot 6^2}{8} = 67,5 \text{ kNm}$$

În schema de operare, momentele de încastrare perfectă au fost înmulțite cu 100 pentru a nu se lucra cu zecimale. Momentele de încastrare perfectă se calculează în valoare absolută, urmând ca semnul real să se introducă în schema de calcul (pentru aceasta se va vedea diagrama M_p^0 pe sistemul de bază). **Se consideră momentele pe nod.**

Elementele necesare alcătuirii schemei de calcul fiind stabilite se poate trece la întocmirea acestora și începerea operației de iterare (fig.5.4). Ordinea de deblocare a nodurilor și valorile momentelor neechilibrate în fiecare fază a ciclului sunt indicate în tabela de lângă schema de calcul.



- Fig.5.4 -

Se deblochează nodul 1. Sub acțiunea momentului neechilibrat $\bar{M}_1 = -9000$, nodul se rotește până ajunge în poziția de echilibru. În această poziție nodul se blochează la loc. Momentele distribuite barelor din nodul 1 sunt:

$$M_{14} = -0,6 \cdot (-9000) = 5400$$

$$M_{12} = -0,4 \cdot (-9000) = 3600$$

Momentul M_{12} se transmite la capătul 2 cu coeficientul de transmitere $\frac{1}{2}$ deci

$$M_{21} = \frac{1}{2} \cdot 3600 = 1800$$

Momentul M_{14} nu se transmite la capătul 4 deoarece acest capăt este articulat și $M_{41}=0$.

După operațiile de distribuire și transmitere, valorile momentelor din nodul 1 se barează ceea ce înseamnă că nodul este în echilibru.

Se trece la nodul 3 unde momentul neechilibrat este $\overline{M}_3 = -4500$. Momentele distribuite la barele din nodul 3 sunt:

$$\begin{aligned} M_{32} &= -0,667 \cdot (-4500) = 3002 \\ M_{37} &= -0,333 \cdot (-4500) = 1498 \end{aligned}$$

Aceste valori se transmit la capetele opuse

$$\begin{aligned} M_{23} &= \frac{1}{2} \cdot 3002 = 1501 \\ M_{73} &= \frac{1}{2} \cdot 1498 = 749 \end{aligned}$$

Acum nodurile 1 și 3 sunt în echilibru și numai nodul 2 este dezechilibrat. Momentul neechilibrat $\overline{M}_2$ are valoarea:

$$\overline{M}_2 = -6750 + 4500 + 1501 + 1800 = 1051$$

Acesta se distribuie la barele nodului 2 astfel

$$\begin{aligned} M_{21} &= -0,182 \cdot 1051 = -191 \\ M_{23} &= -0,364 \cdot 1051 = -383 \\ M_{26} &= -0,182 \cdot 1051 = -191 \\ M_{25} &= -0,272 \cdot 1051 = -286 \end{aligned}$$

Aceste momente se transmit la capetele opuse ale barelor nodului 2, cu excepția barei 2-5 care este articulată în 5. Operația continuă în același mod cu nodurile 3,1,2,... până când valorile obținute sunt foarte mici în raport cu cele de la care s-a pornit. Ultima operație este o distribuție, astfel încât toate nodurile să fie în echilibru.

Însumând valorile pe coloane se obțin valorile finale ale momentelor încovoietoare cu care s-a trasat diagrama M_p (valorile au fost împărțite la 100 pentru a se obține ordinul de mărime de la care s-a plecat) din figura 5.3.

Verificarea diagramei de moment încovoietor M_p . Se verifică rotirile secțiunilor din nodul 1 al barelor 1-2 și 1-4.

$$\theta_{1-2} = \frac{M_{21}^* - 2M_{12}^*}{6\rho_{12}} \text{ și } \theta_{1-4} = -\frac{M_{41}^*}{4\rho_{14}}$$

unde $M_{12}^* = +35,37 - 0 = +35,37$

$$M_{21}^* = +16,14 - 0 = 16,14$$

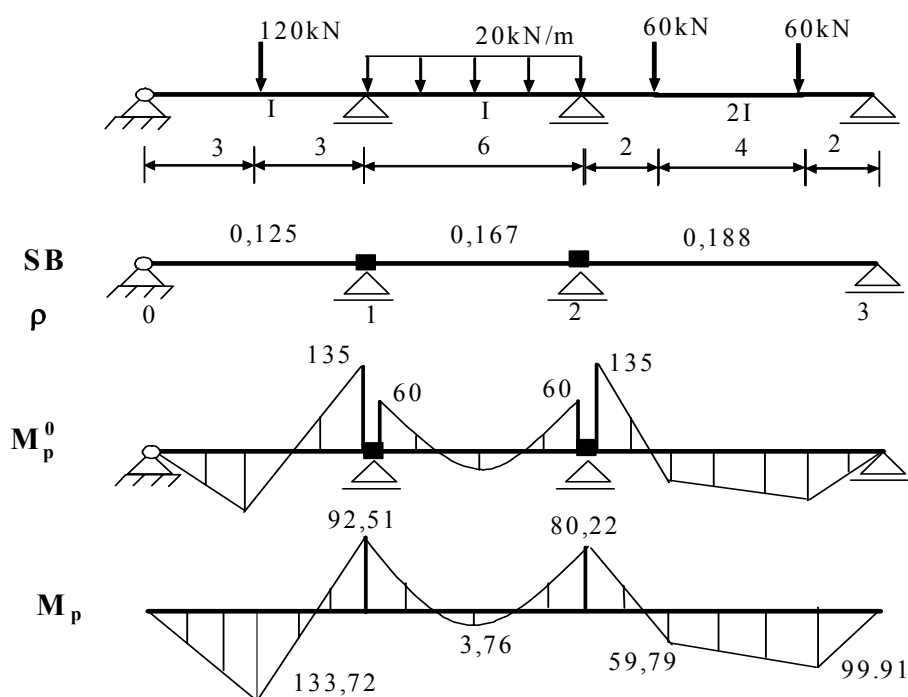
$$M_{14}^* = -35,37 - (-90) = +54,63 \text{ daNm}$$

$$\theta_{1-2} = \frac{16,14 - 2 \cdot (35,37)}{6 \cdot 0,25} = -36,40; \quad \theta_{1-4} = -\frac{54,63}{4 \cdot 0,375} = -36,42$$

Rotirile rezultă aproximativ egale, deci calculul momentelor este corect.

Exemplul 5.2 Să se traseze diagrama de moment încovoietor la grinda continuă din figura 5.5, utilizând procedeul distribuirii și transmiterii momentelor.

Această structură a mai fost rezolvată în paragraful 3.1 utilizând ecuația celor trei momente. Grinda continuă din figură este o structură cu noduri fixe, deoarece prezența rezemului fix (în cazul de față articulația) nu permite translația pe orizontală.



- Fig.5.5 -

Calculul rigidităților practice și al coeficienților de rigiditate ai barelor

Pentru $i_0 = EI$ se obține

$$i_{01} = \frac{EI_{01}}{L_{01}} = \frac{EI}{6} = 0,167EI; \quad \rho_{01} = \frac{3}{4} \cdot \frac{i_{01}}{i_0} = 0,125$$

$$i_{12} = \frac{EI_{12}}{L_{12}} = \frac{EI}{6} = 0,167EI; \quad \rho_{12} = \frac{i_{12}}{i_0} = 0,167$$

$$i_{01} = \frac{EI_{23}}{L_{23}} = \frac{2EI}{8} = 0,25EI; \quad \rho_{01} = \frac{3}{4} \cdot \frac{i_{23}}{i_0} = 0,188$$

Calculul coeficienților de distribuție

Nodul 1

$$\sum \rho_1 = \rho_{01} + \rho_{12} = 0,125 + 0,167 = 0,292$$

$$\mu_{10} = -\frac{\rho_{10}}{\sum \rho_1} = -\frac{0,125}{0,292} = -0,428$$

$$\mu_{12} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_1} = -\frac{0,167}{0,292} = -0,572$$

Nodul 2

$$\sum \rho_2 = \rho_{12} + \rho_{23} = 0,167 + 0,188 = 0,355$$

$$\mu_{21} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,167}{0,355} = -0,470$$

$$\mu_{23} = -\frac{\rho_{23}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,188}{0,355} = -0,530$$

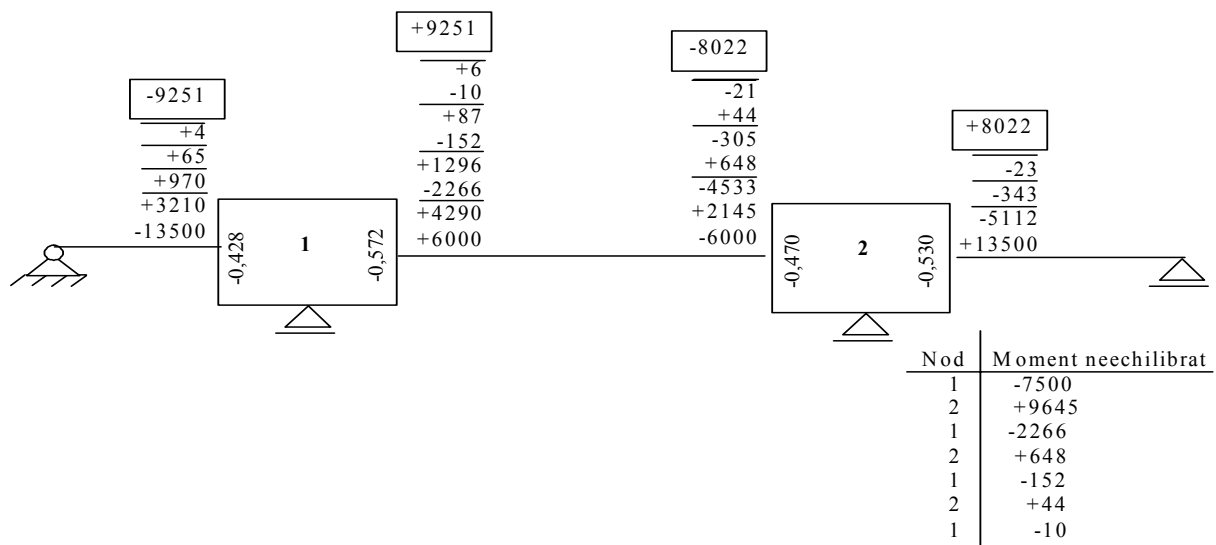
Calculul momentelor de încastrare perfectă

$$M_{10} = \frac{3PL}{16} = \frac{3 \cdot 120 \cdot 6}{16} = 135 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{pL^2}{12} = \frac{20 \cdot 6^2}{12} = 60 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = \frac{3Pa(L-a)}{2L} = \frac{3 \cdot 60 \cdot 2 \cdot 6}{2 \cdot 8} = 135 \text{ kNm}$$

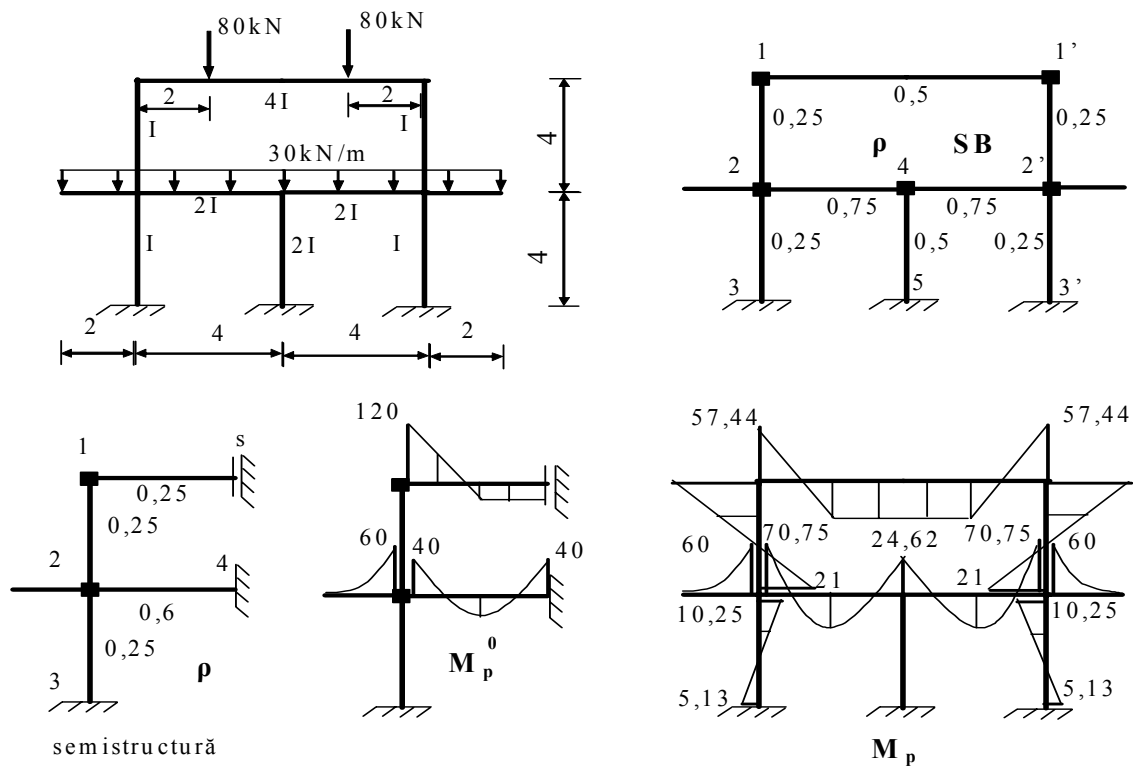
Echilibrarea nodurilor este prezentată în figura 5.6.



- Fig. 5.6 -

Diagrama de moment încovoietor este trasată în figura 5.5. Se observă că s-au obținut aceleași valori ca și la exemplul 3.1.

Exemplul 5.3 Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura simetrică din figura 5.7, utilizând procedeul distribuirii și transmiterii momentelor.



- Fig.5.7 -

Structura este simetrică și încărcată simetric. Se comportă ca o structură cu noduri fixe. Coeficienții de rigiditate și momentele de încastrare perfectă se calculează pe structura întreagă. Calculul iterativ se va efectua pe semistructură. Pe rigla superioară – intersectată de axa de simetrie – coeficienții de rigiditate se

corectează $\rho_{1s} = \frac{1}{2}\rho_{11'}$

Calculul rigidităților practice și al coeficienților de rigiditate ai barelor

Pentru $i_0 = EI$ se obține

$$i_{11'} = \frac{4EI}{8} = 0,5EI; \quad \rho_{11'} = \frac{i_{11'}}{i_0} = 0,5; \quad \rho_{1s} = \frac{1}{2}\rho_{11'} = 0,25$$

$$i_{12} = i_{1'2'} = \frac{EI}{4} = 0,25EI; \quad \rho_{12} = \rho_{1'2'} = \frac{i_{12}}{i_0} = 0,25$$

$$i_{23} = i_{2'3'} = \frac{EI}{4} = 0,25EI; \quad \rho_{23} = \rho_{2'3'} = \frac{i_{23}}{i_0} = 0,25$$

$$i_{24} = i_{2'4'} = \frac{3EI}{4} = 0,75EI; \quad \rho_{24} = \rho_{2'4'} = \frac{i_{24}}{i_0} = 0,75$$

$$i_{45} = \frac{2EI}{4} = 0,5EI; \quad \rho_{45} = \frac{i_{45}}{i_0} = 0,5$$

Calculul coeficienților de distribuție

Nodul 1

$$\sum \rho_1 = \rho_{1s} + \rho_{12} = 0,25 + 0,25 = 0,5$$

$$\mu_{1s} = -\frac{\rho_{1s}}{\sum \rho_1} = -\frac{0,25}{0,5} = -0,500$$

$$\mu_{12} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_1} = -\frac{0,25}{0,5} = -0,500$$

Nodul 2

$$\sum \rho_2 = \rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{24} = 0,25 + 0,25 + 0,75 = 1,25$$

$$\mu_{21} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,25}{1,25} = -0,200$$

$$\mu_{23} = -\frac{\rho_{23}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,25}{1,25} = -0,200$$

$$\mu_{24} = -\frac{\rho_{24}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,75}{1,25} = -0,600$$

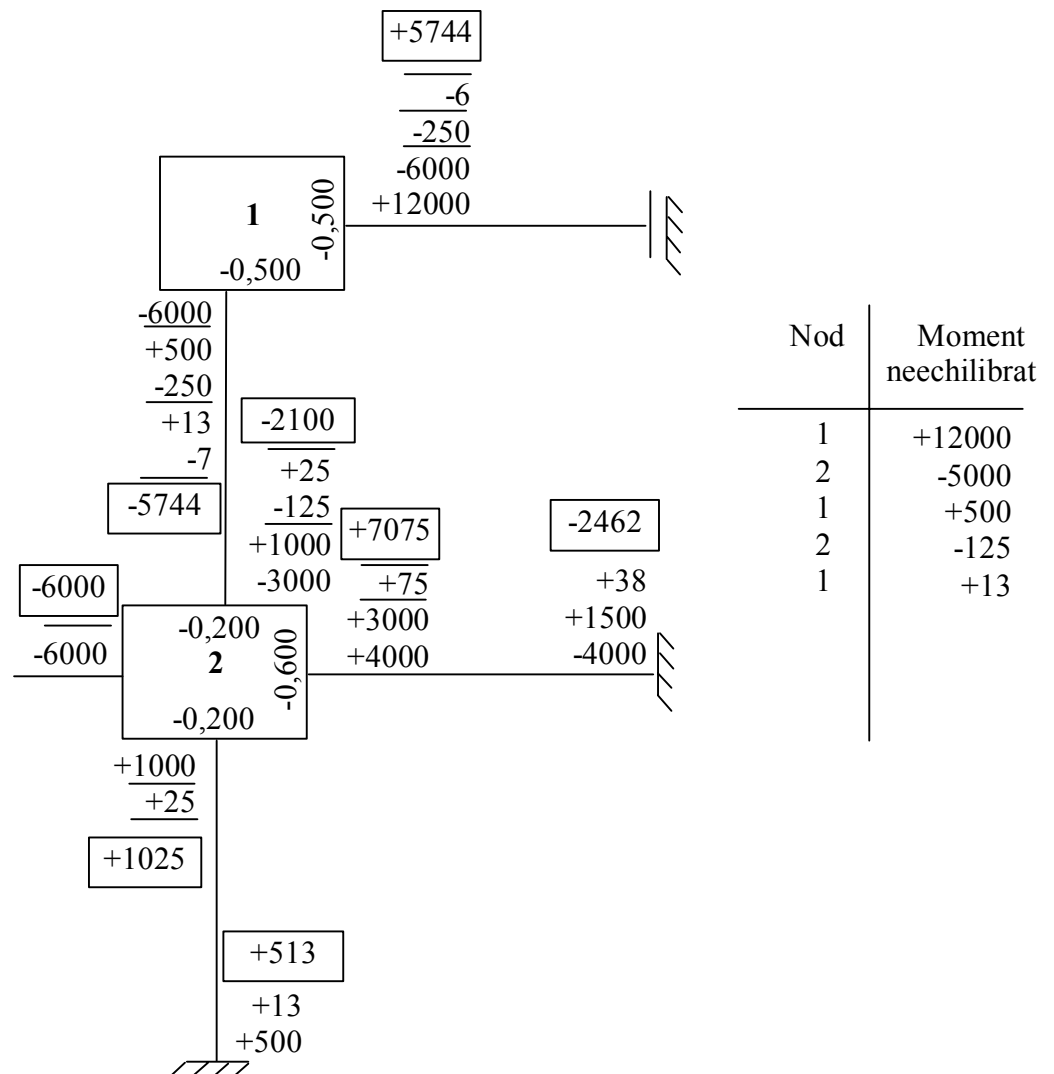
Calculul momentelor de încastrare perfectă

$$\text{Momentul pe consolă } M_c = \frac{pL^2}{2} = \frac{30 \cdot 2^2}{2} = 60\text{kNm}$$

$$M_{11'} = M_{1'1} = \frac{Pa(L-a)}{L} = \frac{80 \cdot 2 \cdot (8-2)}{8} = 120\text{kNm}$$

$$M_{24} = M_{42} = \frac{pL^2}{12} = \frac{30 \cdot 4^2}{12} = 40\text{kNm}$$

Schema de iterare este dată în figura 5.8, iar diagrama finală este dată în figura 5.7. De remarcat faptul că momentul încovoietor de pe consolă intervine o singură dată în iterare, respectiv la prima echilibrare a nodului 2.



- Fig.5.8 -

5.2. Structuri cu noduri deplasabile

Comparativ cu structurile cu noduri fixe, la structurile cu noduri deplasabile, rezolvarea directă a sistemului ecuațiilor de condiție este mai dificilă datorită numărului mai mare de necunoscute. Sistemul de ecuații conține în afara ecuațiilor de nod, în care apar termeni noi, și ecuațiile de grad de libertate. Datorită acestor elemente, criteriul lui Wittmeyer nu mai este, în general, satisfăcut, fapt care influențează defavorabil asupra convergenței, ea devenind lentă la structurile de formă oarecare.

În literatura de specialitate există mai multe procedee de calcul pentru rezolvarea prin iterație a structurilor cu noduri deplasabile respectiv:

- procedeu de rezolvare în două etape;
- procedeu de rezolvare într-o singură etapă.

În continuare se prezintă numai procedeul de rezolvare în două etape, deoarece se aplică structurilor de formă oarecare și este cea mai des utilizată în practică.

În ceea ce privește procedeul de operare într-o singură etapă, aceasta se aplică numai structurilor cu stâlpi verticali.

5.2.1. Procedeul de rezolvare în două etape

Procedeul de rezolvare în două etape reprezintă aplicarea procedeului distribuției și transmiterii momentelor (procedeul Cross) în calculul structurilor cu noduri deplasabile. Pentru a utiliza convergența bună a procedeului Cross aplicat structurilor cu noduri fixe, în calculul structurilor cu noduri deplasabile se procedează în modul următor:

- Structura cu noduri deplasabile (fig.5.9,a) se transformă în structură cu noduri fixe prin blocarea translațiilor pe direcțiile gradelor de libertate (fig.5.9,b)
- Structura cu noduri fixe va fi încărcată cu forțele exterioare și cu translațiile pe direcțiile gradelor de libertate Z_1 și Z_2 , inițial necunoscute.

Etapă I^a Structura cu noduri fixe este rezolvată pentru încărcările ce intervin.

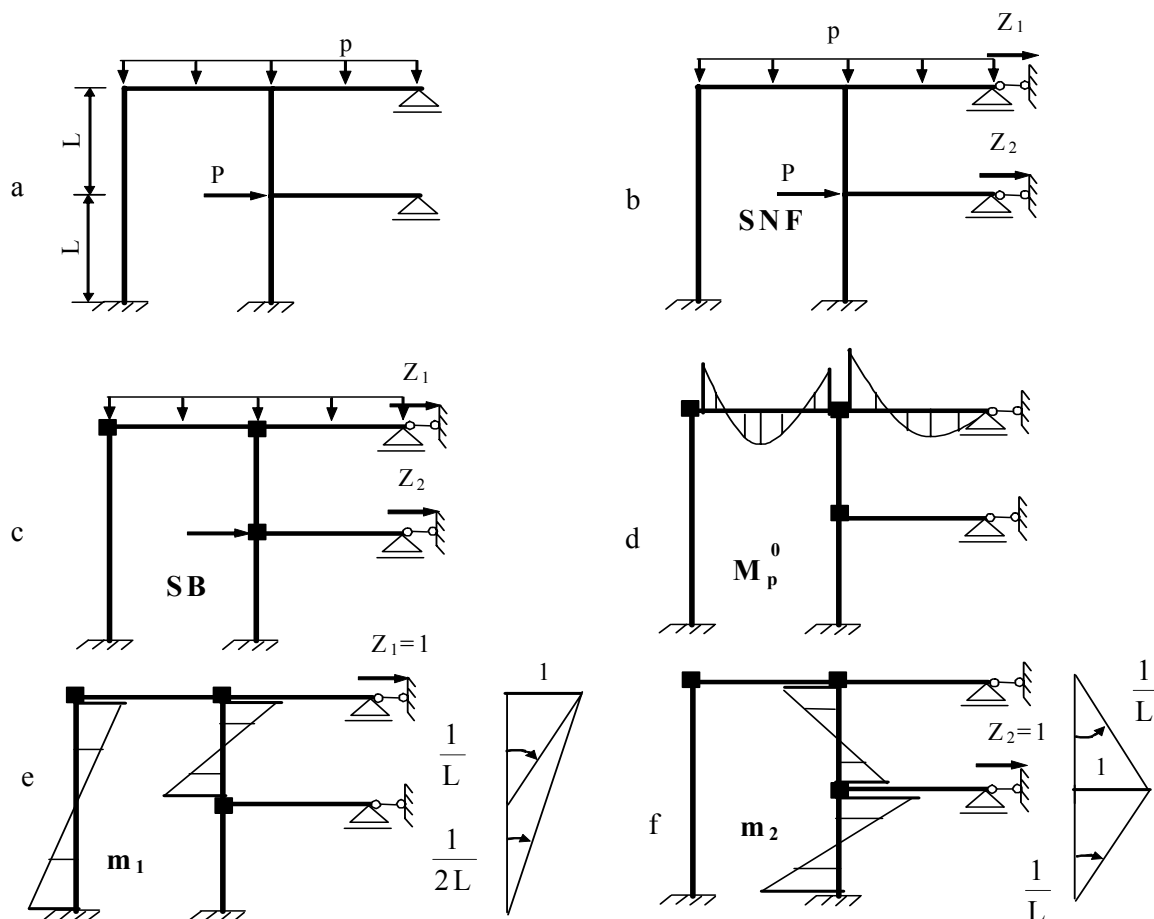
- Se trece la sistemul de bază al metodei deplasărilor (fig.5.9,c) și se alcătuiește schema Cross.

- Se încarcă sistemul de bază cu forțele exterioare și se obține diagrama M_p^0 (fig.5.9,d). Momentele de încastare perfectă din diagrama M_p^0 se echilibrează prin procedeul Cross și se obține diagrama M_p^f , pe structura cu noduri fixe – cu nodurile rigide deblocate și în echilibru;

- Se încarcă sistemul de bază cu translația $Z_1=1$ și se obține diagrama m_1 (fig.5.9,e). Momentele din diagrama m_1 se echilibrează prin procedeul Cross și se obține diagrama m_1^f - pe structura cu noduri fixe;

- Se încarcă sistemul de bază cu translația $Z_2=1$ și se obține diagrama m_2 (fig.5.9,f). Momentele din diagrama m_2 se echilibrează prin procedeul Cross și se obține diagrama m_2^f - pe structura cu noduri fixe.

Dacă structura are mai multe grade de libertate se continuă operațiile asupra diagramelor unitare.



- Fig.5.9 -

Etapa II^a Etapa a doua constă în revenirea de la structura cu noduri fixe la structura reală cu noduri deplasabile punând condiția ca reacțiunea totală din fiecare legătură de grad de libertate să fie egală cu zero, deoarece aceste legături nu există în realitate. Sistemul ecuațiilor de condiție, pentru structura analizată are forma:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

S-a obținut un sistem de ecuații liniare (în acest caz două ecuații). Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi se calculează după regulile utilizate în metoda deplasărilor.

Cu necunoscutele Z_1 și Z_2 determinate se calculează momentele încovoietoare pe structura reală – tot prin suprapunere de efecte

$$M_p = M_p^f + m_1^f Z_1 + m_2^f Z_2 \quad (5.16)$$

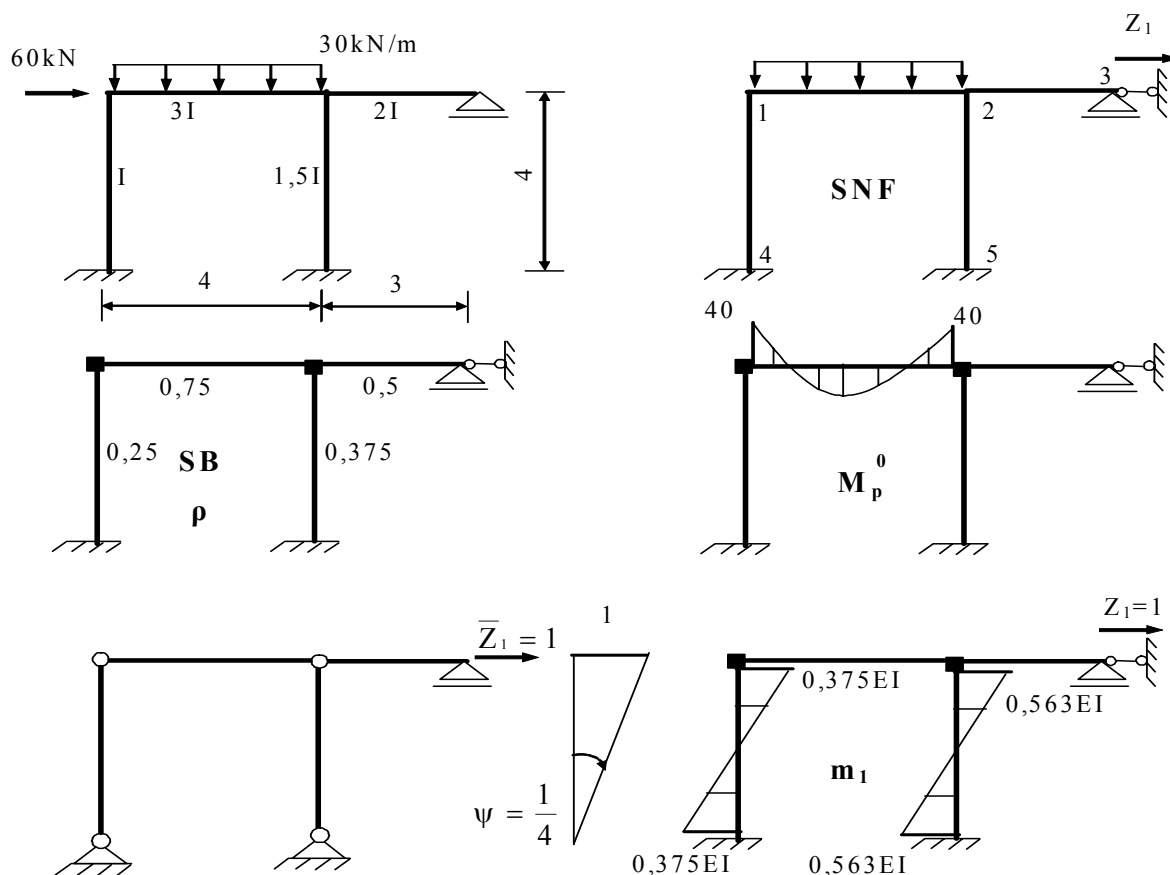
Observații:

- Procedul de operare în două etape este avantajos pentru rezolvarea structurilor având un număr redus de grade de libertate elastică ($1 \div 3$);

- În cazul structurilor la care se analizează mai multe ipoteze de încărcare, începând cu ipoteza a doua se calculează numai diagrama M_p^f , termenii liberi din ecuații și se rezolvă sistemul de ecuații, deoarece diagramele m_1^f , m_2^f , etc sunt unice, ele depind numai de caracteristicile structurii și nu depind de încărcări.

- Dacă forțele sunt forțe concentrate, aplicate în noduri atunci $M_p^0 \equiv 0$ și $M_p^f \equiv 0$, astfel că termenii liberi din sistemul ecuațiilor de condiție se determină direct ca efect al forțelor date.

Exemplul 5.4. Să se traseze diagrama de momente încovoietoare la structura din figura 5.10, utilizând procedul de operare în două etape.



- Fig.5.10 -

Structura este cu noduri deplasabile având un singur grad de libertate elastică. Se trece la structura cu noduri fixe prin introducerea unei legături de grad de libertate pe direcția acestuia. Această structură este încărcată cu forțele date și cu deplasarea pe direcția gradului de libertate, care reprezintă necunoscuta problemei.

Etapa I^a Se trece la sistemul de bază prin introducerea de blocaje de nod în nodurile rigide. Pentru alcătuirea schemei de calcul se determină următoarele elemente:

- rigiditățile practice ale barelor

$$i_{12} = \frac{3EI}{4} = 0,75EI; \quad i_{23} = \frac{2EI}{3} = 0,667EI;$$

$$i_{14} = \frac{EI}{4} = 0,25EI \quad i_{25} = \frac{1,5EI}{4} = 0,375EI$$

- coeficienții de rigiditate (se consideră $i_0=EI$)

$$\rho_{12} = 0,75; \quad \rho_{23} = 0,5; \quad \rho_{14} = 0,25; \quad \rho_{25} = 0,375;$$

- suma coeficienților de rigiditate în noduri

$$\sum \rho_1 = 1; \quad \sum \rho_2 = 1,625;$$

- coeficienții de distribuție

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{0,75}{1} = -0,750; \quad \mu_{14} = -\frac{0,25}{1} = -0,250$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{0,75}{1,625} = -0,461; \quad \mu_{23} = -\frac{0,5}{1,625} = -0,308;$$

$$\mu_{25} = -\frac{0,375}{1,625} = -0,231$$

- momentele de încastrare perfectă sunt

$$M_{12} = M_{21} = \frac{pL^2}{12} = \frac{30 \cdot 4^2}{12} = 40 \text{ kNm}$$

- momentele încovoietoare produse de deplasarea $Z_1=1$ pe sistemul de bază

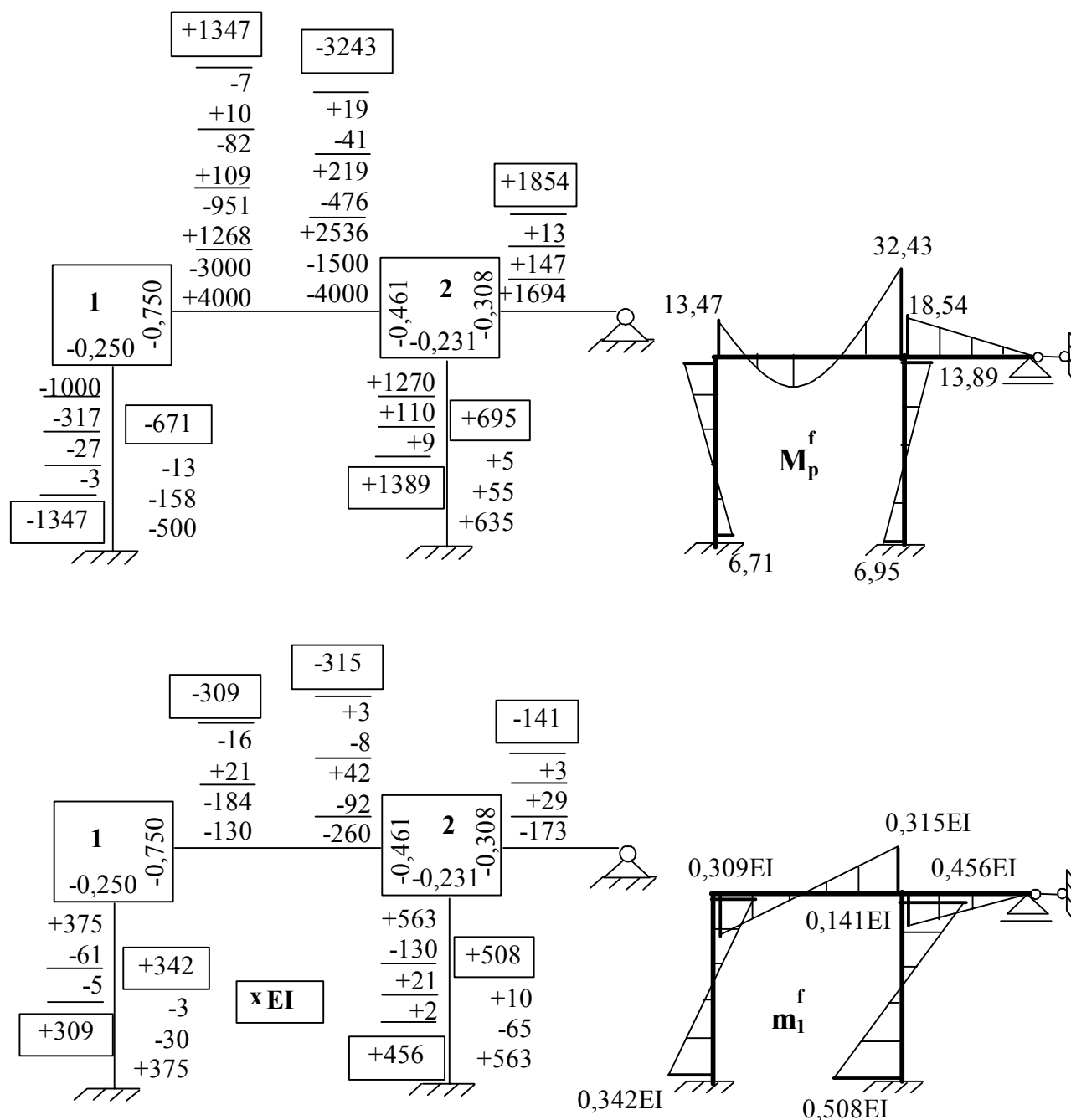
$$M_{14} = M_{41} = 6 \cdot i_{14} \cdot \psi_{14} = 6 \cdot 0,25EI \cdot \frac{1}{4} = 0,375EI$$

$$M_{25} = M_{52} = 6 \cdot i_{25} \cdot \psi_{25} = 6 \cdot 0,375EI \cdot \frac{1}{4} = 0,563EI$$

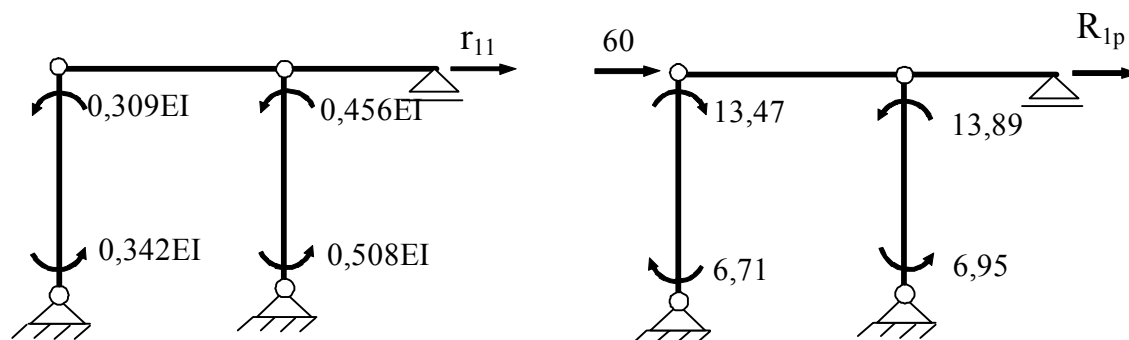
Pentru echilibrarea diagramei M_p^0 , în schema Cross, valorile momentelor de încastrare perfectă se înmulțesc cu 100.

Pentru echilibrarea diagramei m_1 , în schema Cross, valorile momentelor încovoietoare se înmulțesc cu 1000.

Operațiile de echilibrare a momentelor prin procedeul Cross și diagramele obținute M_p^f și m_1^f , sunt date în figura 5.11.



Calculul reacțiunilor r_{11} și R_{1p} se face utilizând principiul lucrului mecanic virtual (fig. 5.12).



- Fig.5.12 -

Astfel, pentru calculul reacțiunii r_{11} se încarcă structura articulată cu momentele încovoietoare din diagrama m_1^f și se scrie condiția ca lucrul mecanic virtual să fie egal cu zero. Deoarece structura are stâlpii verticali, vor produce lucru mecanic numai momentele încovoietoare de pe stâlpi.

$$\delta L = 0$$

$$r_{11} \cdot 1 - (0,309EI + 0,342EI) \cdot \frac{1}{4} - (0,508EI + 0,456EI) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$r_{11} = 0,404EI$$

Pentru calculul reacțiunii R_{1p} se încarcă structura articulată cu momentele încovoietoare din diagrama M_p^f și cu forțele date și se scrie condiția ca lucrul mecanic virtual să fie egal cu zero. Deoarece structura are stâlpii verticali, vor produce lucru mecanic numai momentele încovoietoare de pe stâlpi și forța orizontală din nodul 1.

$$\delta L = 0$$

$$R_{1p} \cdot 1 + 60 \cdot 1 + (13,47 + 6,71) \cdot \frac{1}{4} - (13,89 + 6,95) \cdot \frac{1}{4} = 0 ;$$

$$R_{1p} = -59,835$$

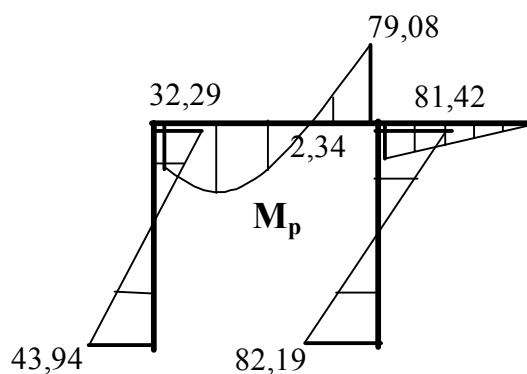
Deplasarea Z_1 are valoarea

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{-59,835}{0,404EI} = \frac{148,106}{EI}$$

Momentele încovoietoare finale, calculate cu relația

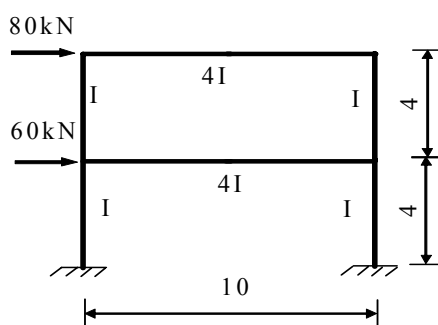
$$M_p = M_p^f + m_1^f Z_1$$

sunt date în figura 5.13.



- Fig.5.13 -

EXEMPLUL 5.5. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura simetrică din figura 5.14 utilizând procedeul de operare în două etape.



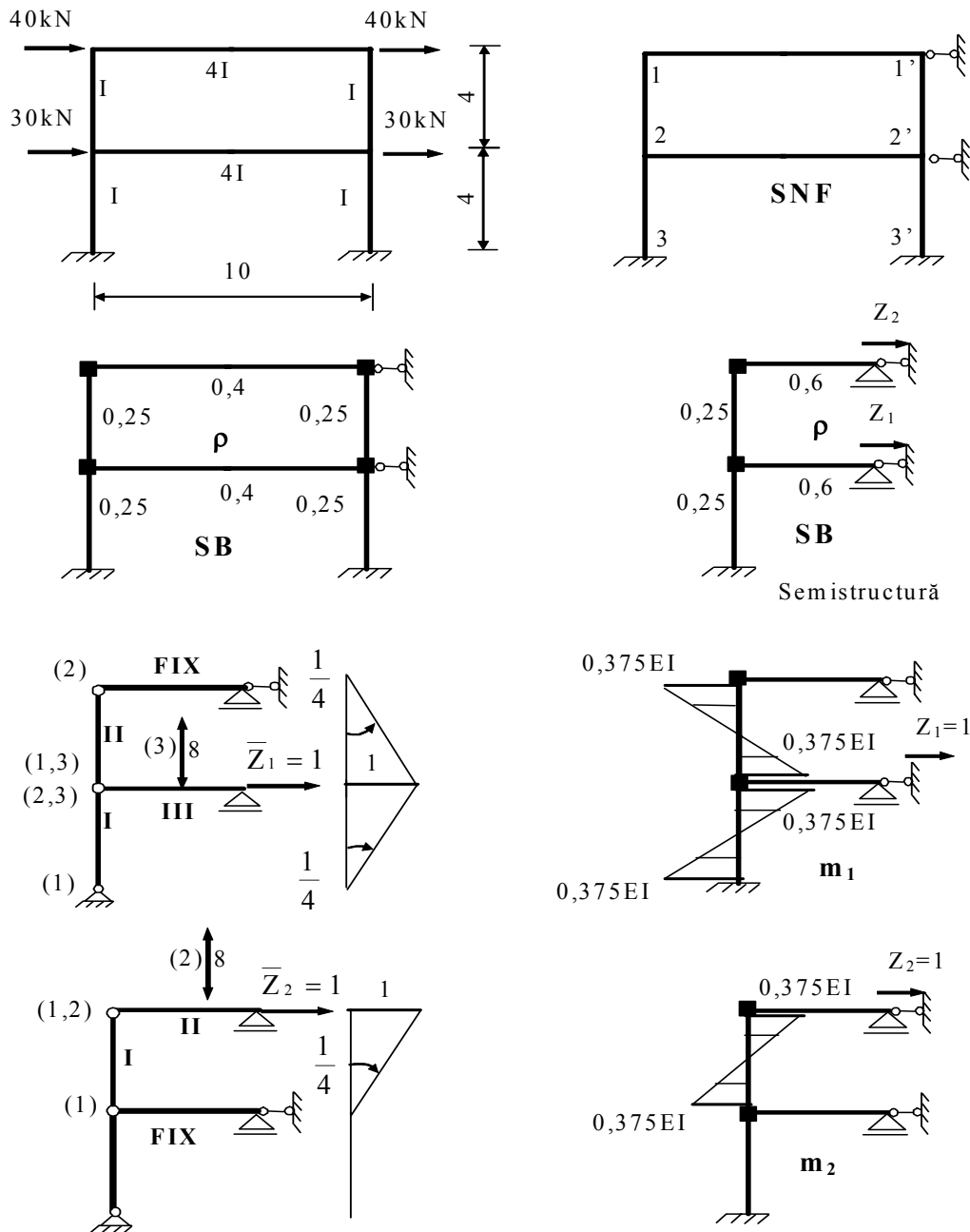
- Fig.5.14 -

Structura este identică cu cea analizată în exemplul 2.3. Încărcarea oarecare este de tip antisimetric, respectiv numai componenta antisimetrică produce deformarea structurii prin încovoiere (fig.5.15).

Pentru acest caz de încărcare, structura este cu noduri deplasabile având două grade de libertate elastică.

Structura cu noduri fixe se obține prin introducerea de legături de grad de libertate pe direcțiile acestora.

Etapa I^a. Se trece la sistemul de bază prin introducerea de blocaje de nod în nodurile rigide. Coeficienții de rigiditate se calculează pe structura întreagă. Calculul iterativ se va efectua pe semistructură. Pe riglele orizontale - intersectate de axa de simetrie - coeficienții de rigiditate se corectează $\rho_{is} = 1,5\rho_{ii}$.



- Fig.5.15 -

Calculul rigidităților practice și al coeficienților de rigiditate ai barelor

Pentru $i_0 = EI$ se obține

$$i_{11'} = i_{22'} = \frac{4EI}{10} = 0,4EI;$$

$$\rho_{11'} = \rho_{22'} = 0,4; \quad \rho_{1s} = \rho_{2s} = 0,6$$

$$i_{12} = i_{1'2'} = \frac{EI}{4} = 0,25EI;$$

$$\rho_{12} = \rho_{1'2'} = 0,25$$

$$i_{23} = i_{2'3'} = \frac{EI}{4} = 0,25EI;$$

$$\rho_{23} = \rho_{2'3'} = 0,25$$

Calculul coeficienților de distribuție

$$\text{Nodul 1} \quad \sum \rho_1 = \rho_{1s} + \rho_{12} = 0,6 + 0,25 = 0,85$$

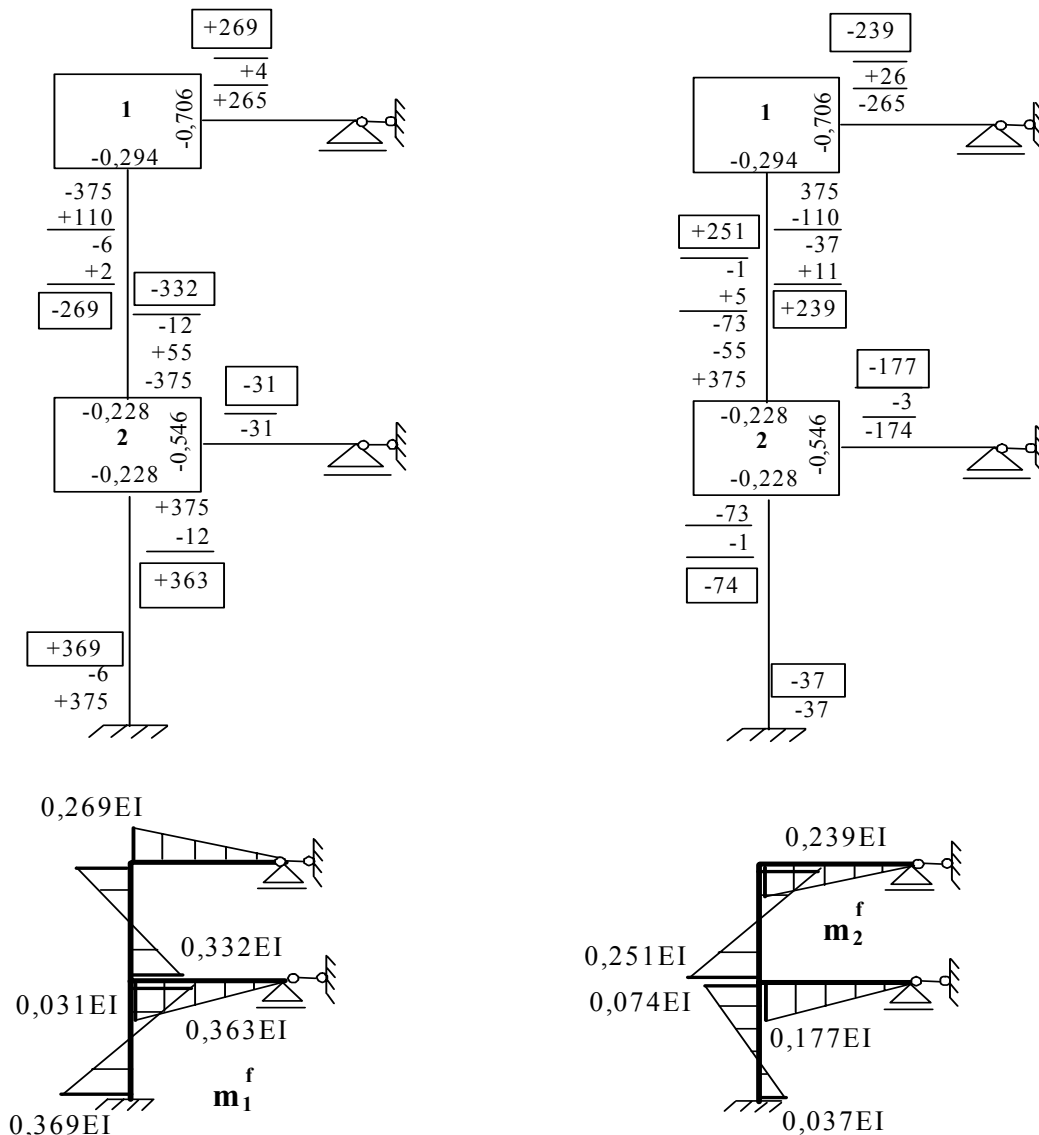
$$\mu_{1s} = -\frac{\rho_{1s}}{\sum \rho_1} = -\frac{0,6}{0,85} = -0,706; \quad \mu_{12} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_1} = -\frac{0,25}{0,85} = -0,294$$

$$\text{Nodul 2} \quad \sum \rho_2 = \rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{2s} = 0,25 + 0,25 + 0,6 = 1,1$$

$$\mu_{21} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,25}{1,1} = -0,227 \quad \mu_{23} = -\frac{\rho_{23}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,25}{1,1} = -0,227$$

$$\mu_{24} = -\frac{\rho_{24}}{\sum \rho_2} = -\frac{0,6}{1,1} = -0,546$$

Forțele fiind aplicate în noduri diagrama $M_p^0 \equiv 0$ și $M_p^f \equiv 0$. Vor fi echilibrate prin procedeul Cross numai momentele din diagramele unitare m_1 și m_2 (fig. 5.16).



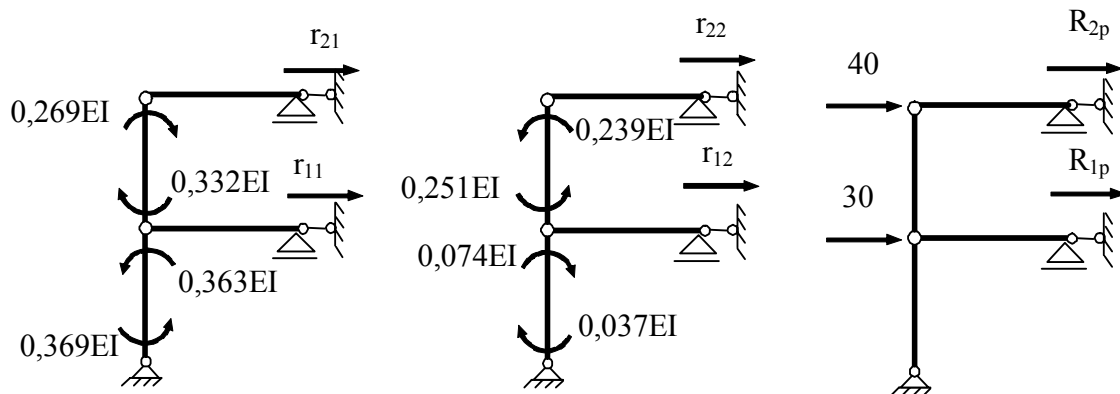
- Fig.5.16 -

Etapa a - II^a

Trecerea de la sistemul cu noduri fixe, la structura reală cu noduri deplasabile. Sistemul ecuațiilor de condiție are forma

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Pentru calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi s-a utilizat principiul lucrului mecanic virtual (fig.5.17).



- Fig.5.17 -

$$r_{11} \cdot 1 - (0,369EI + 0,363EI) \cdot \frac{1}{4} - (0,332EI + 0,269EI) \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad r_{11} = 0,3333EI$$

$$r_{12} \cdot 1 + (0,037EI + 0,074EI) \cdot \frac{1}{4} - (0,251EI + 0,239EI) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 0; \quad r_{12} = -0,1503EI$$

$$r_{21} \cdot 1 + (0,332EI + 0,269EI) \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad r_{21} = -0,1503EI$$

$$r_{22} \cdot 1 - (0,251EI + 0,239EI) \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad r_{22} = 0,1225EI$$

$$R_{1p} \cdot 1 + 30 \cdot 1 = 0; \quad R_{1p} = -30$$

$$R_{2p} \cdot 1 + 40 \cdot 1 = 0; \quad R_{2p} = -40$$

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} 0,3333EI \cdot Z_1 - 0,1503EI \cdot Z_2 - 30 = 0 \\ -0,1503EI \cdot Z_1 + 0,1225EI \cdot Z_2 - 40 = 0 \end{cases}$$

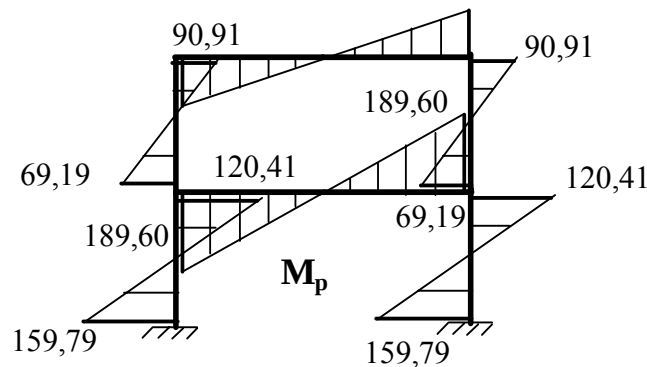
cu valorile necunoscutelor

$$Z_1 = \frac{531,11}{EI} \text{ și } Z_2 = \frac{978,17}{EI}$$

Diagrama finală de momente încovoietoare se obține prin suprapunere de efecte, respectiv

$$M_p = M_p^f + m_1^f Z_1 + m_2^f Z_2$$

și este prezentată în figura 5.18.



- Fig.5.18 -

EXEMPLUL 5.6 Să se traseze diagrama de momente încovoietoare la structura din figura 5.19, utilizând metoda de operare în două etape. Se consideră $EI=10^5 \text{ kNm}^2$, $\alpha = 10^{-5} \text{ grad}^{-1}$, iar înălțimea secțiunilor transversale ale barelor sunt: pentru rigle $h_r=60\text{cm}$, iar pentru stâlpi $h_s=40\text{cm}$.

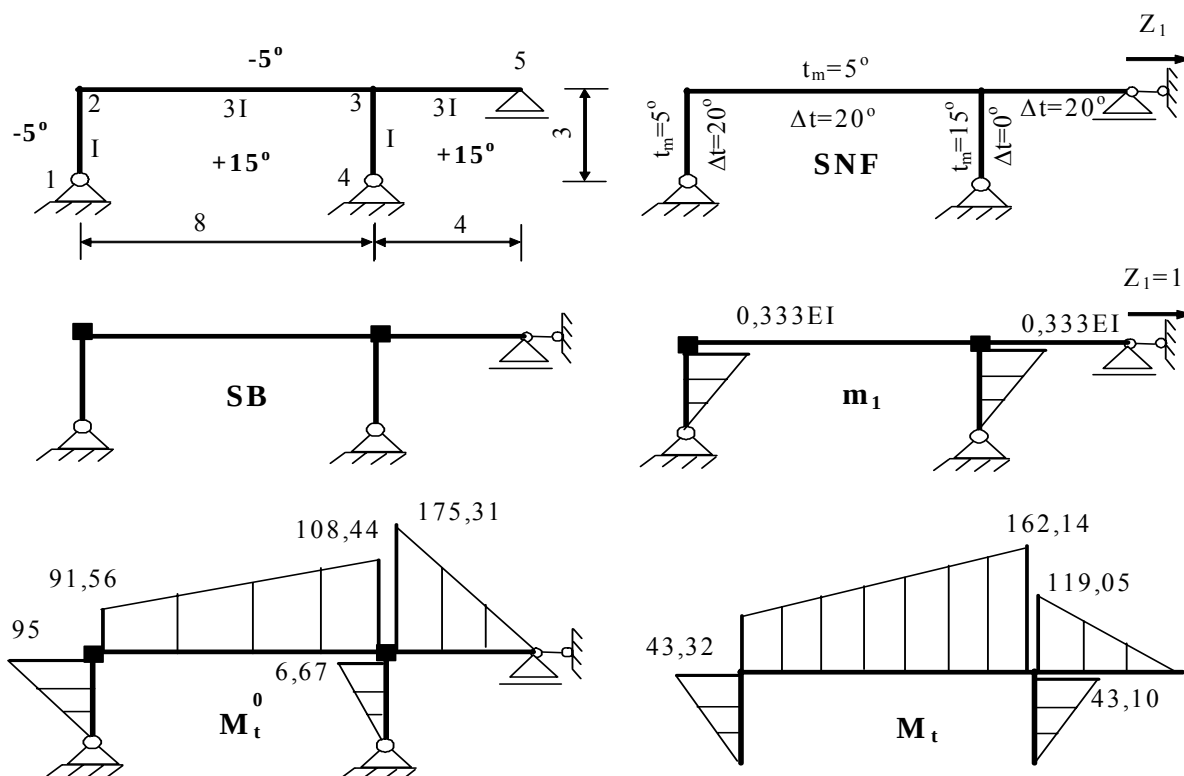
Structura este aceeași cu cea de la exemplul 4.9, care a fost rezolvată prin metoda deplasărilor (prin scrierea sistemului de ecuații).

Structura este cu noduri deplasabile având un singur grad de libertate elastică. Structura cu noduri fixe se obține prin introducerea unei legături de grad de libertate pe direcția acestuia. Această structură este încărcată cu variația de temperatură și cu deplasarea pe direcția gradului de libertate, care reprezintă necunoscuta problemei.

Etapă I^a Se trece la sistemul de bază prin introducerea de blocaje de nod în nodurile rigide. Pentru alcătuirea schemei de calcul se determină următoarele elemente:

- rigiditățile practice ale barelor

$$i_{12} = i_{34} = \frac{EI}{3} = 0,333EI; i_{23} = \frac{3EI}{8} = 0,375EI; i_{35} = \frac{3EI}{4} = 0,75EI$$



- Fig.5.19 -

- coeficienții de rigiditate (se consideră $i_0=EI$)

$$\rho_{12} = \rho_{34} = 0,25; \quad \rho_{23} = 0,375; \quad \rho_{35} = 0,563;$$

- suma coeficienților de rigiditate în noduri

$$\sum \rho_2 = 0,625; \quad \sum \rho_3 = 1,188;$$

- coeficienții de distribuție

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{0,25}{0,625} = -0,4; \quad \mu_{23} = -\frac{0,375}{0,625} = -0,6;$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{0,375}{1,188} = -0,316; \quad \mu_{34} = -\frac{0,25}{1,188} = -0,21;$$

$$\mu_{35} = -\frac{0,563}{1,625} = -0,474$$

Diagrama de momente încovoietoare M_t^0 (fig.5.19) produsă de variația de temperatură pe sistemul de bază se obține prin suprapunere de efecte, respectiv

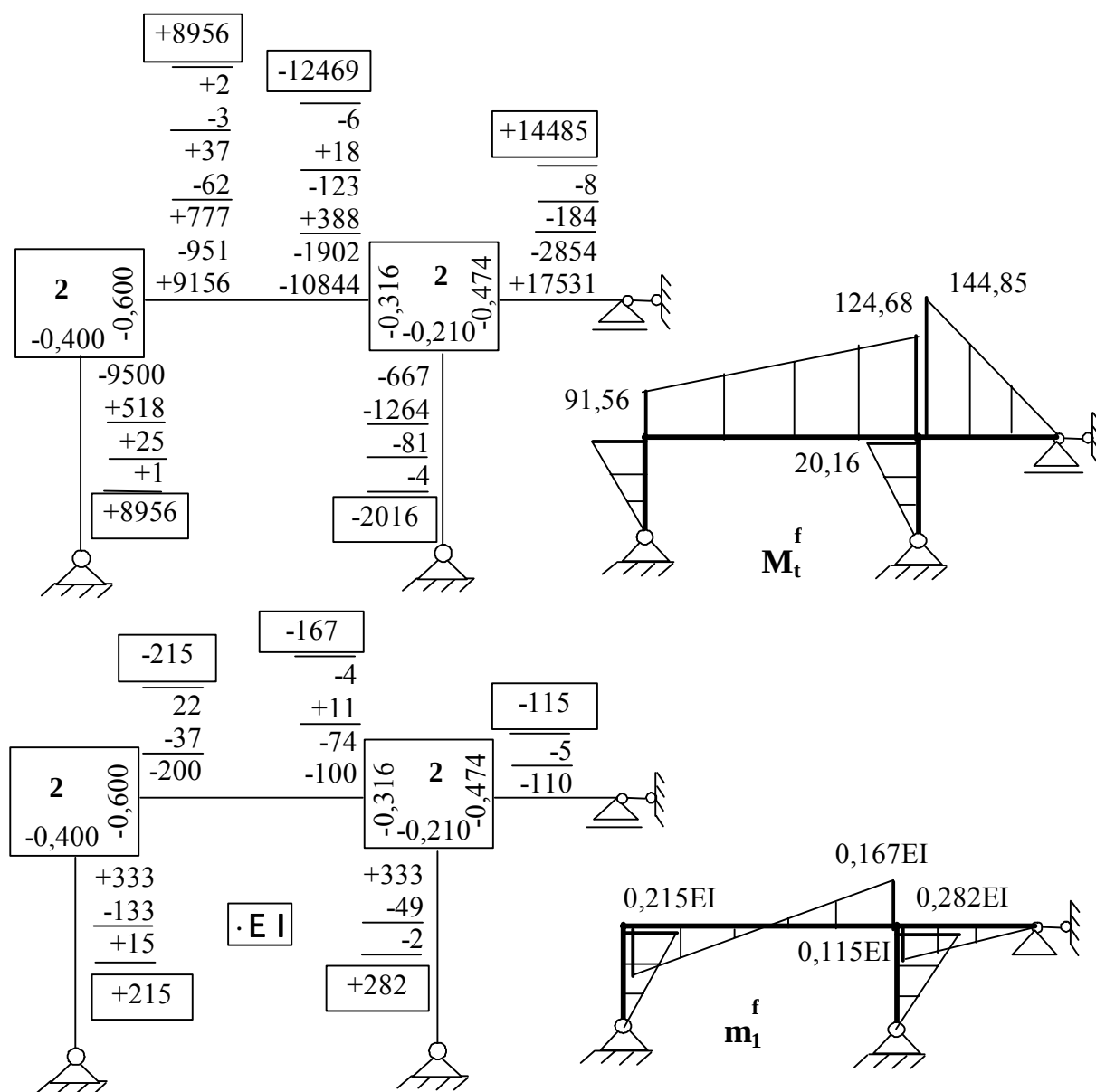
$$M_t^0 = M_{tm}^0 + M_{\Delta t}^0$$

unde M_{tm}^0 este produsă de temperatura medie din axele barelor, iar $M_{\Delta t}^0$ este produsă de diferența de temperatură dintre fața inferioară și fața superioară a barelor.

Modul de obținere al celor două diagrame a fost expus în detaliu la exemplul 4.9. În acest exemplu se prezintă direct diagrama M_t^0 .

Din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea $Z_1=1$, pe direcția gradului de libertate, se obține diagrama m_1 .

Prin echilibrarea momentelor din diagrama M_t^0 se obține diagrama M_t^f , iar prin echilibrarea momentelor din diagrama m_1 se obține diagrama m_1^f (fig.5.20).

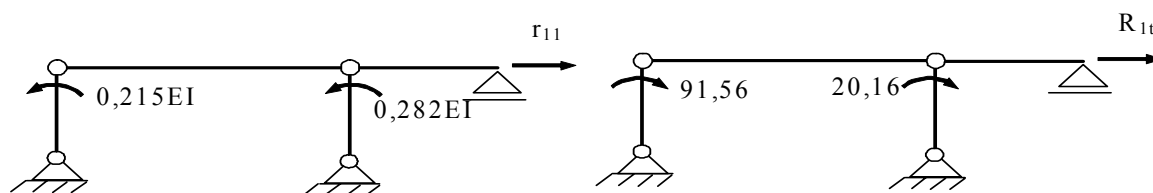


- Fig.5.20 -

Etapa a - II^a Se trece de la structura cu noduri fixe la structura reală cu noduri deplasabile, punând condiția ca reacțiunea totală din legătura de grad de libertate să fie egală cu zero

$$R_l = 0; \quad r_{11}Z_1 + R_{lt} = 0$$

Reacțiunile r_{11} și R_{lt} se determină utilizând principiul lucrului mecanic virtual (fig. 5.21).



- Fig.5.21 -

$$r_{11} \cdot 1 - 0,215EI \cdot \frac{1}{3} - 0,282EI \cdot \frac{1}{3} = 0; \quad r_{11} = 0,166EI$$

$$R_{lt} \cdot 1 + 91,56 \cdot \frac{1}{3} + 20,16 \cdot \frac{1}{3} = 0; \quad R_{lt} = -37,24;$$

Deplasarea Z_1 are valoarea

$$Z_1 = -\frac{R_{lt}}{r_{11}} = -\frac{-37,24}{0,166EI} = \frac{224,337}{EI}$$

Momentele încovoietoare finale, calculate cu relația

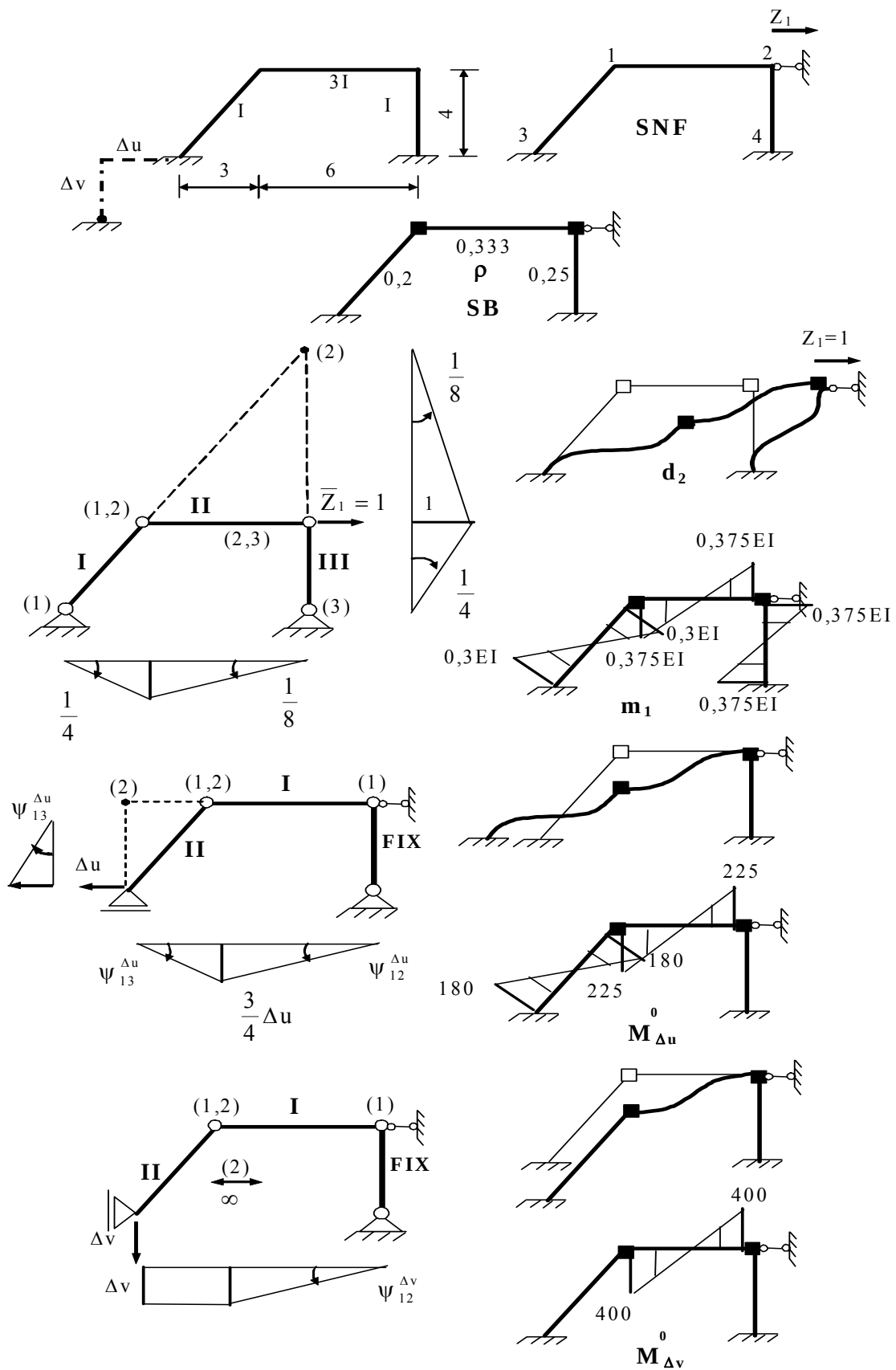
$$M_t = M_t^f + m_1^f Z_1$$

sunt date în figura 5.19.

Se constată că diagrama de moment încovoietor este identică cu cea obținută în exemplul 4.9 utilizând metoda deplasărilor (prin scrierea sistemului de ecuații).

EXEMPLUL 5.7 Să se traseze diagrama de momente încovoietoare la structura din figura 5.22 încărcată cu cedări de reazeme, utilizând procedeul de operare în două etape. Se consideră: $\Delta u = 0,6\text{cm}$, $\Delta v = 0,8\text{cm}$, $EI = 10^5 \text{ kNm}^2$.

Structura este cu noduri deplasabile având un singur grad de libertate elastică. Structura cu noduri fixe se obține prin introducerea unei legături de grad de libertate pe direcția acestuia. Această structură este încărcată cu cedările de reazeme și cu deplasarea pe direcția gradului de libertate, care reprezintă necunoscuta problemei.



- Fig.5.22 -

Etapa I^a Se trece la sistemul de bază prin introducerea de blocaje de nod în nodurile rigide.

Calculul rigidităților practice ale barelor

$$i_{12} = \frac{3EI}{6} = 0,5EI; \quad i_{13} = \frac{EI}{5} = 0,2EI; \quad i_{24} = \frac{EI}{4} = 0,25EI$$

Calculul coeficienților de rigiditate (se consideră $i_0=EI$)

$$\rho_{12} = 0,5; \quad \rho_{15} = 0,2; \quad \rho_{24} = 0,25;$$

Calculul coeficienților de distribuție

$$\text{Nodul 1} \quad \sum \rho_1 = 0,7$$

$$\mu_{12} = -0,714; \quad \mu_{13} = -0,286;$$

$$\text{Nodul 2} \quad \sum \rho_2 = 0,75$$

$$\mu_{21} = -0,667; \quad \mu_{24} = -0,333;$$

Din încărcarea sistemului de bază cu translația $Z_1=1$ se obține diagrama de momente încovoietoare m_1 .

Diagrama de momente încovoietoare M_{Δ}^0 produsă de cedările de reazeme pe sistemul de bază se obține prin suprapunere de efecte, respectiv

$$M_{\Delta}^0 = M_{\Delta u}^0 + M_{\Delta v}^0$$

unde $M_{\Delta u}^0$ este produsă de cedarea de reazem Δu , iar $M_{\Delta v}^0$ este produsă de cedarea de reazeme Δv .

Pentru a determina efectul cedării de reazem Δu , se studiază structura articulată, la care se elimină legătura pe direcția cedării de reazem și se introduce legătura de grad de libertate (fig.5.22). Astfel, mecanismului format i se imprimă deplasarea Δu și se determină rotațiile corpurilor. Datorită prezenței legăturii de grad de libertate bara 2-4 rămâne fixă, iar barele 1-2 și 1-3 se rotesc cu unghiurile

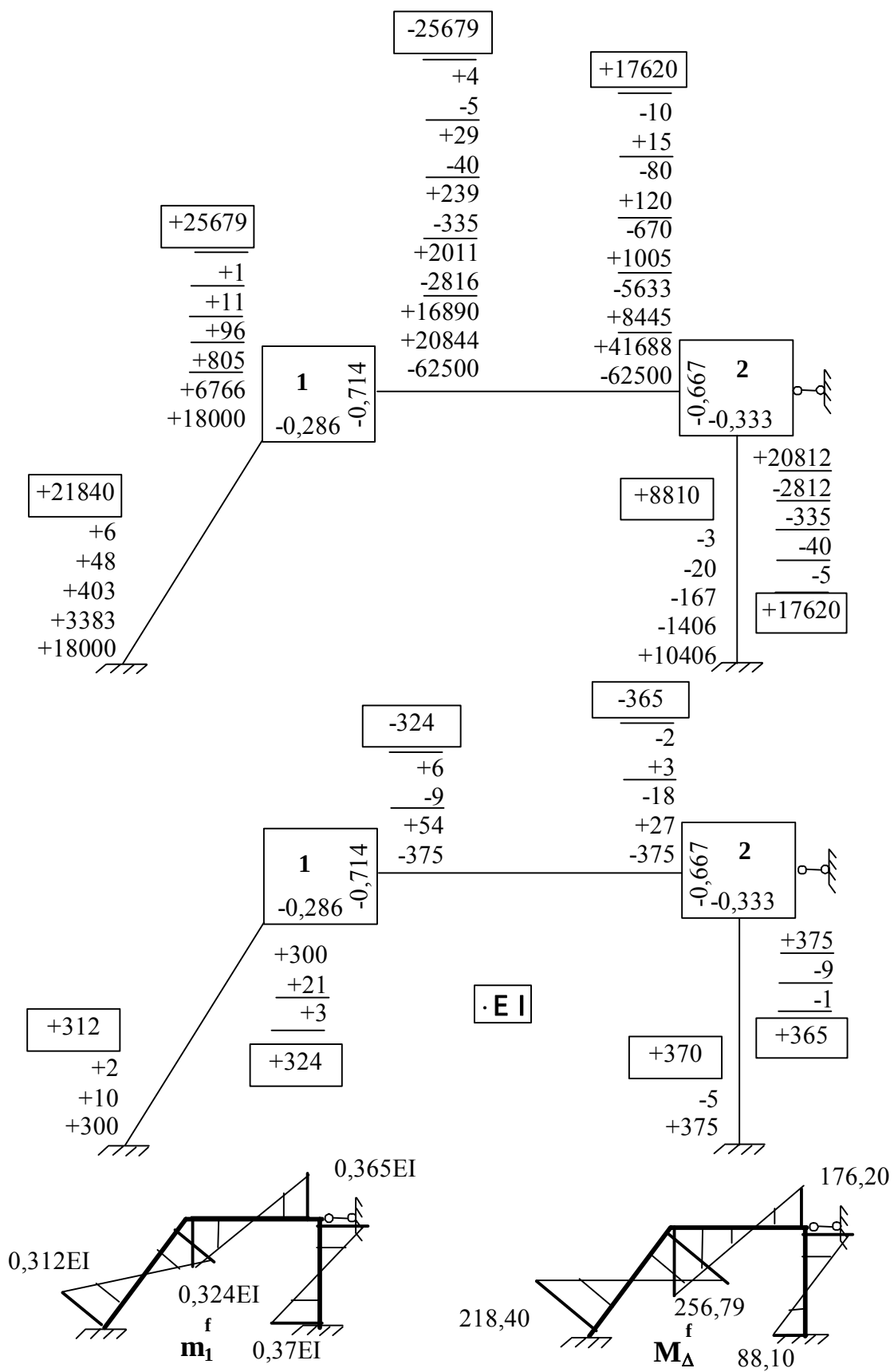
$$\psi_{12}^{\Delta u} = \frac{\Delta u}{8} = \frac{0,6 \cdot 10^{-2}}{8} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\psi_{13}^{\Delta u} = \frac{\Delta u}{4} = \frac{0,6 \cdot 10^{-2}}{4} = 0,15 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Momentele de încastrare perfectă sunt:

$$\mathbf{M}_{12}^{\Delta u} = \mathbf{M}_{21}^{\Delta u} = 6i_{12}\psi_{12}^{\Delta u} = 6 \cdot 0,5 \cdot 10^5 \cdot 0,75 \cdot 10^{-3} = 225 \text{ kNm}$$

$$\mathbf{M}_{13}^{\Delta u} = \mathbf{M}_{31}^{\Delta u} = 6i_{13}\psi_{13}^{\Delta u} = 6 \cdot 0,2 \cdot 10^5 \cdot 0,15 \cdot 10^{-2} = 180 \text{ kNm}$$



- Fig.5.23 -

Pentru a determina efectul cedării de reazem Δv , se studiază structura articulată, la care se elimină legătura pe direcția cedării de reazem și se introduce legătura de grad de libertate (fig.5.22). Astfel, mecanismului format i se imprimă deplasarea Δv și se determină rotirile corpurilor. Datorită prezenței legăturii de grad de libertate bara 2-4 rămâne fixă, bara 1-3 are o mișcare de translație, iar bara 1-2 se rotește cu unghiul

$$\psi_{12}^{\Delta v} = \frac{\Delta v}{6} = \frac{0,8 \cdot 10^{-2}}{6} = 0,133 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Momentele de încastrare perfectă sunt:

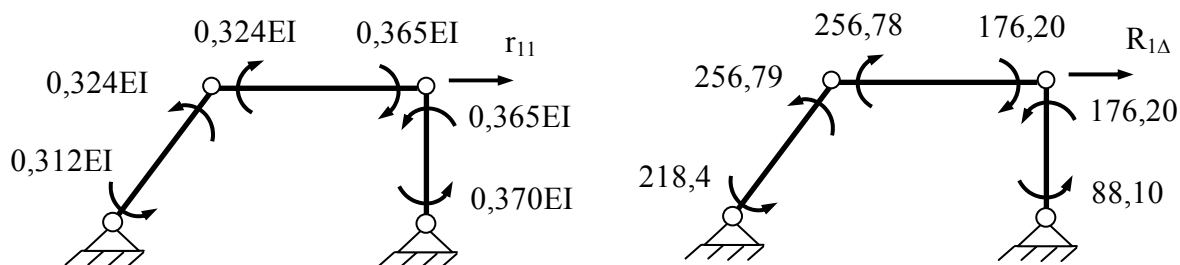
$$\mathbf{M}_{12}^{\Delta v} = \mathbf{M}_{21}^{\Delta v} = 6i_{12}\psi_{12}^{\Delta v} = 6 \cdot 0,5 \cdot 10^5 \cdot 0,133 \cdot 10^{-2} = 400 \text{ kNm}$$

Prin echilibrarea momentelor din diagrama M_{Δ}^0 se obține diagrama M_{Δ}^f , iar prin echilibrarea momentelor din diagrama m_1 se obține diagrama m_1^f (fig.5.23).

Etapă a - II^a Se trece de la structura cu noduri fixe la structura reală cu noduri deplasabile, punând condiția ca reacțiunea totală din legătura de grad de libertate să fie egală cu zero

$$R_1 = 0; \quad r_{11}Z_1 + R_{1\Delta} = 0$$

Reacțiunile r_{11} și R_{1t} se determină utilizând principiul lucrului mecanic virtual (fig. 5.24).



- Fig.5.24 -

$$\begin{aligned} r_{11} \cdot 1 - (0,312EI + 0,324EI) \cdot \frac{1}{4} + (0,324EI + 0,365EI) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - \\ - (0,370EI + 0,365EI) \cdot \frac{1}{4} = 0 \\ r_{11} = 0,4289EI \end{aligned}$$

$$R_{1\Delta} \cdot 1 - (218,4 + 256,79) \cdot \frac{1}{4} + (256,79 + 176,2) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) -$$

$$- (88,10 + 176,20) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$R_{1\Delta} = 238,996;$$

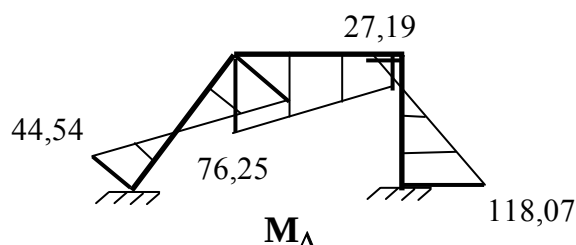
Deplasarea Z_1 are valoarea

$$Z_1 = -\frac{R_{1\Delta}}{r_{11}} = -\frac{238,996}{0,4289EI} = -\frac{557,23}{EI}$$

Momentele încovoietoare finale, calculate cu relația

$$M_{\Delta} = M_{\Delta}^f + m_1^f Z_1$$

sunt date în figura 5.25.



- Fig.5.25 -

EXEMPLUL 5.8 Să se traseze diagrama de momente încovoietoare la structura cu tirant din figura 5.26, utilizând metoda de operare în două etape. Se consideră $EI=10^5 \text{ kNm}^2$, $E_t=2,1 \cdot 10^8 \text{ kNm}^2$, $A_t=6,28 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Rolul tirantului în alcătuirea unei structuri este de a limita variația distanței dintre nodurile pe care le unește, realizându-se o distribuție mai rațională a eforturilor.

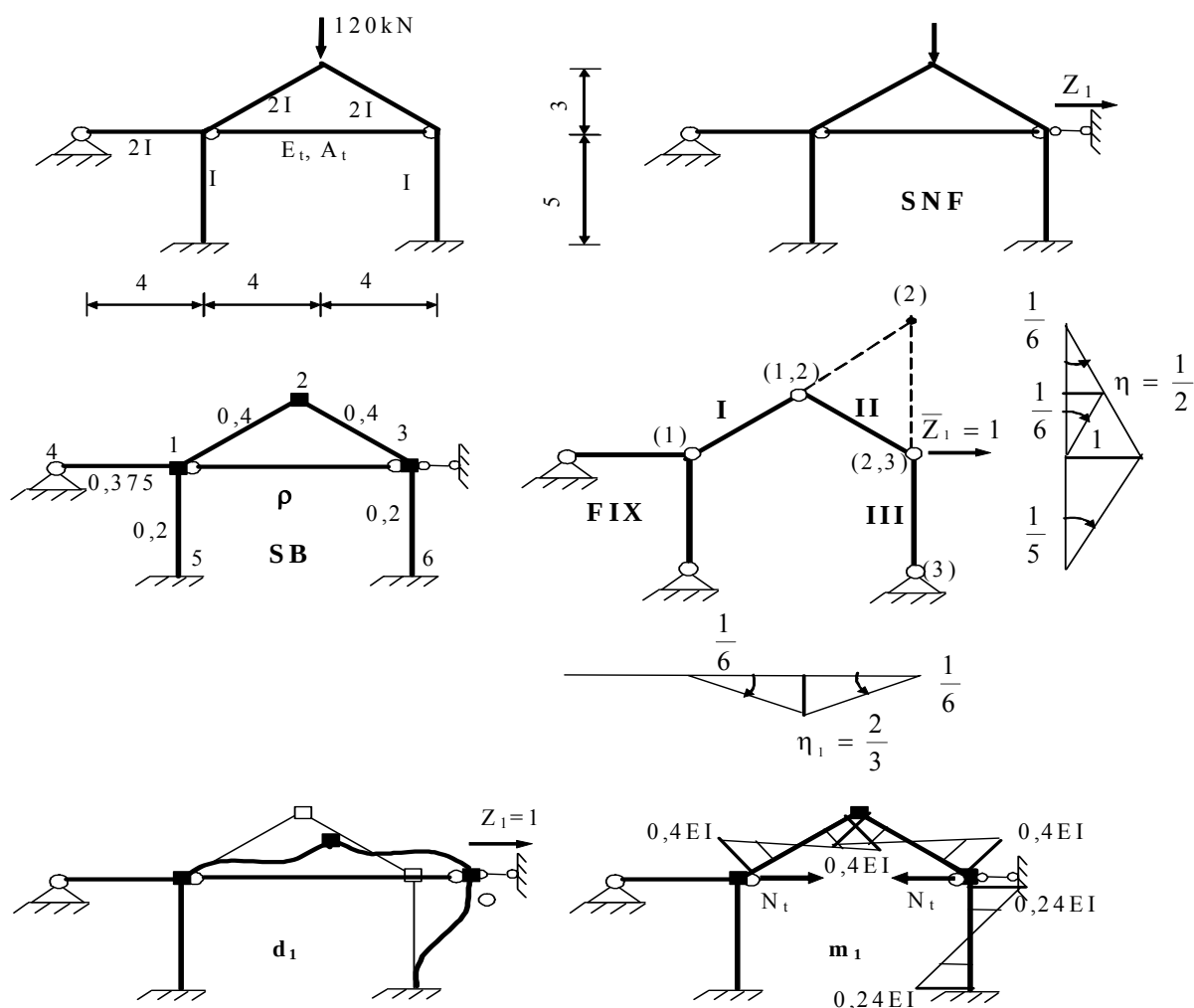
În paragraful 4.1 s-a arătat că prezența tirantului nu influențează asupra numărului de grade de libertate elastică a structurii, alungindu-se, el nu împiedică variația distanței dintre nodurile pe care le unește ci doar o limitează.

În concluzie, structura este cu noduri deplasabile având un grad de libertate elastică. Structura cu noduri fixe se obține introducând o legătură de grad de libertate (pe direcția tirantului în acest caz).

Etapă I^a Se trece la sistemul de bază prin introducerea de blocaje de nod în nodurile rigide.

Calculul rigidităților practice ale barelor:

$$i_{12} = i_{23} = \frac{2EI}{5} = 0,4EI; \quad i_{15} = i_{26} = \frac{EI}{5} = 0,2EI; \quad i_{14} = \frac{2EI}{4} = 0,5EI$$



- Fig.5.26 -

Calculul coeficienților de rigiditate (se consideră $i_0=EI$)

$$\rho_{12} = \rho_{23} = 0,4; \quad \rho_{15} = \rho_{36} = 0,2; \quad \rho_{14} = 0,375;$$

Calculul coeficienților de distribuție:

Nodul 1 $\sum \rho_1 = 0,975$

$$\mu_{12} = -0,410; \quad \mu_{15} = -0,205; \quad \mu_{14} = -0,385;$$

Nodul 2 $\sum \rho_2 = 0,8$

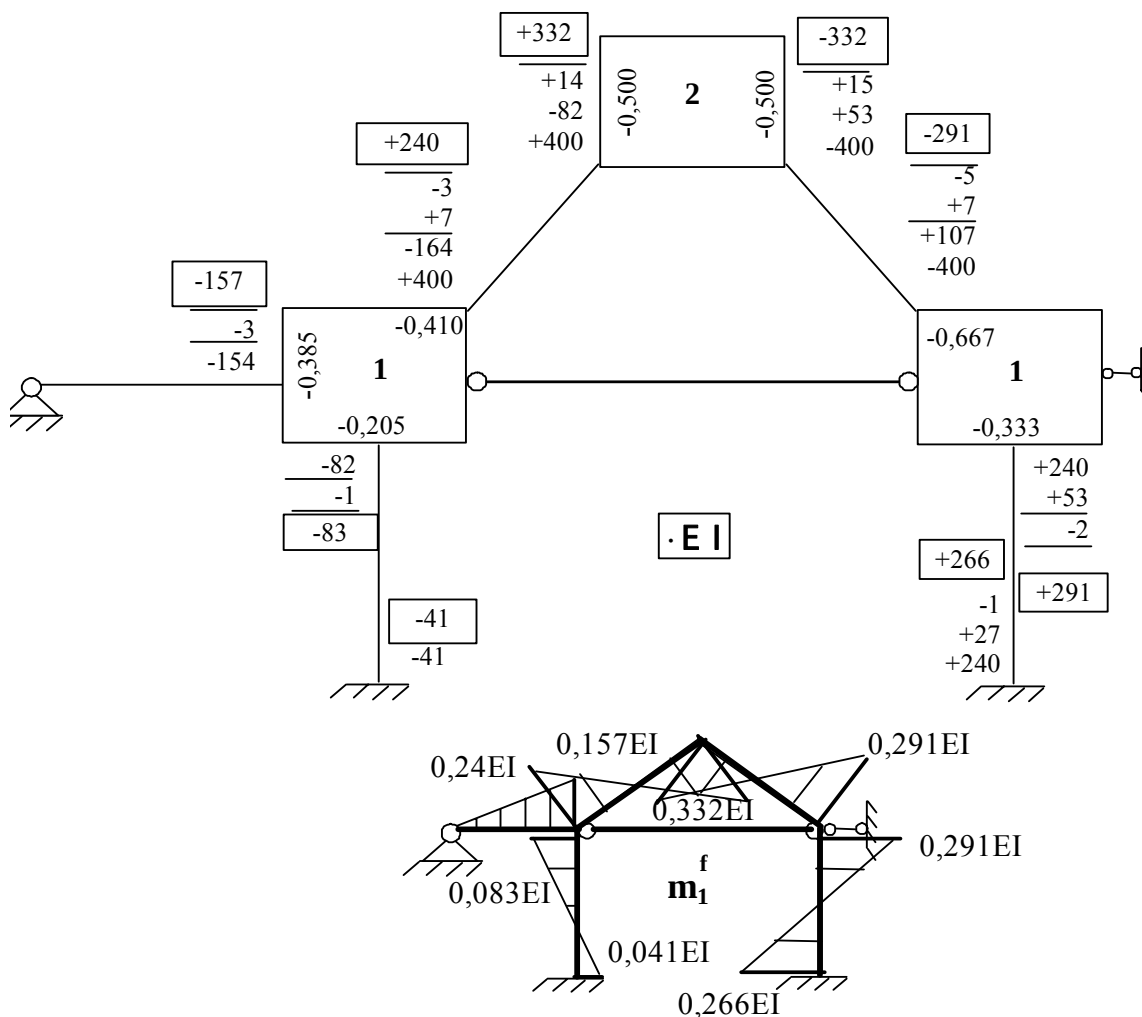
$$\mu_{21} = -0,500; \quad \mu_{23} = -0,500;$$

Nodul 3 $\sum \rho_3 = 0,6$

$$\mu_{32} = -0,667; \quad \mu_{36} = -0,333;$$

Din încărcarea sistemului de bază cu translația $Z_1=1$ se obține diagrama de momente încovoietoare m_1 . Tirantul fiind o bară dublu articulată, nu preia momente încovoietoare.

Forța exterioară fiind aplicată în nod $M_p^0 \equiv 0$ și $M_p^f \equiv 0$. Vor fi echilibrate prin metoda Cross numai momentele încovoietoare din diagrama unitară m_1 (fig.5.27).



- Fig.5.27 -

Etapă a - II^a Se trece de la structura cu noduri fixe la structura reală cu noduri deplasabile, punând condiția ca reacțiunea totală din legătura de grad de libertate să fie egală cu zero

$$R_1=0; \quad r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

Reacțiunile r_{11} și R_{1p} se calculează cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual.

În calculul reacțiunii r_{11} apare și efectul tirantului. Astfel sub acțiunea deplasării elastice $Z_1=1$, în tirant se produce efortul

$$N_t = \frac{E_t \cdot A_t}{L_t} \cdot Z_1$$

care produce lucrul mecanic $-N_t \cdot Z_1 = -N_t \cdot 1$.

Semnul minus apare datorită faptului că efortul N_t are sens invers sensului deplasării.

Astfel expresia reacțiunii unitare r_{11} devine:

$$r_{11} \cdot 1 - (0,24EI + 0,332EI) \cdot \frac{1}{6} + (0,332EI + 0,291EI) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) - (0,266EI + 0,291EI) \cdot \frac{1}{5} - \frac{E_t \cdot A_t}{L_t} \cdot 1 = 0$$

Tinând cont de valorile date, reacțiunea r_{11} capătă valoarea:

$$r_{11} = 0,3106EI + \frac{2,1 \cdot 10^8 \cdot 6,28 \cdot 10^{-4}}{8} = 31060 + 15485 = 47545 \text{ kN/m}$$

Pentru reacțiunea R_{1p} avem

$$R_{1p} \cdot 1 + 120 \cdot \frac{2}{3} = 0; \quad R_{1p} = -80;$$

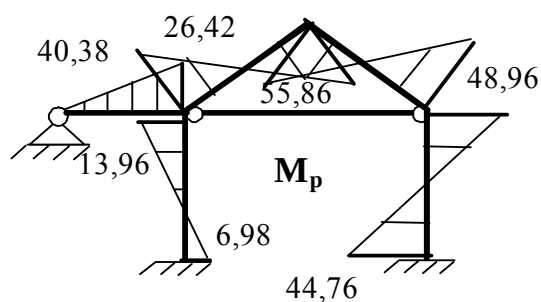
Deplasarea Z_1 are valoare

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{-80}{47545} = 1,6826 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

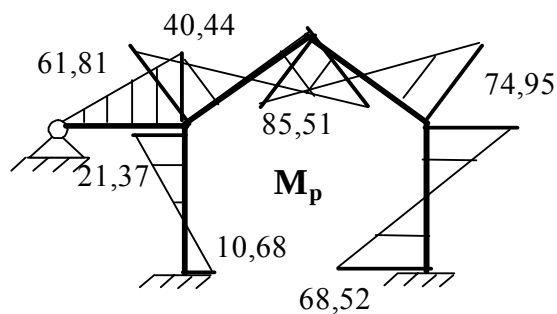
Momentele încovoietoare finale, calculate cu relația

$$M_p = m_1^f Z_1$$

sunt date în figura 5.28,a.



a



b

- Fig.5.28 -

Observație:

Dacă structura nu ar fi avut tirant, atunci s-ar fi obținut următoarele valori:

$$r_{11} = 0,3106EI = 31060 \text{ kN/m}.$$

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{-80}{31060} = 2,5757 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Momentele încovoietoare finale, calculate cu relația

$$M_p = m_1^f Z_1$$

sunt date în figura 5.28,b.

În acest caz valorile momentele încovoietoare sunt mai mari decât în cazul cadrului cu tirant (cu 53%).

BIBLIOGRAFIE

1. Bănuț V. - Statica Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor. I.C.B. 1988
2. Bănuț, V, Teodorescu,M.E. - Statica Construcțiilor. Aplicații. Structuri static determinate. Ed. MatrixRom, București, 2003
3. Bănuț, V, Teodorescu,M.E. - Statica Construcțiilor. Aplicații. Structuri static nedeterminate. Ed. MatrixRom, București, 2003
4. Cătărig, A., Petrina, M. - Statica Construcțiilor. Metode de calcul și aplicații. Editura Dacia, Cluj-Napoca 1991
5. Gherghiu, Al. - Statica Construcțiilor. Vol. 1. Structuri static determinate. Editura Tehnică București, 1960
6. Gherghiu, Al. - Statica Construcțiilor. Vol. 2. Structuri static nedeterminate. Editura Tehnică București, 1965
7. Ivan, M., Vulpe, A, Bănuț, V. - Statica, Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor. Editura Didactică și pedagogică, București, 1982
8. Mazilu, P. - Statica Construcțiilor. Vol 1 și 2. Editura Tehnică, 1959
9. Teodorescu, M.E. – Statica Construcțiilor. Structuri static determinate. Ed. MatrixRom, București, 2000

CUPRINS

PREFATA	3
CAPITOLUL I Introducere	5
1.1. Generalități	5
1.2. Teoreme de reciprocitate	6
1.2.1. Teorema reciprocității lucrului mecanic (teorema lui Betti)	6
1.2.2. Teorema reciprocității deplasărilor unitare (teorema lui Maxwell)	8
1.2.3. Teorema reciprocității reacțiunilor unitare	9
CAPITOLUL II Metoda eforturilor	...11
2.1. Principiile generale ale metodei eforturilor	...11
2.1.1. Stabilirea gradului de nedeterminare statică	...11
2.1.2. Alegerea sistemului de bază	...12
2.1.3. Alcătuirea sistemului ecuațiilor de condiție	...13
2.1.4. Calculul deplasărilor la structuri static nedeterminate	...16
2.2. Posibilități de simplificare a calculului.	...21
2.2.1. Utilizarea simetriei structurilor	...22
2.3. Efectul variației de temperatură la structuri static nedeterminate	...31
2.4. Efectul cedărilor de rezeme la structuri static nedeterminate	...34
CAPITOLUL III Aplicarea metodei eforturilor la rezolvarea unor tipuri particulare de structuri	...37
3.1. Grinzi continue	...37
3.1.1. Ecuația celor trei momente	...39
3.1.2. Grinzi static nedeterminate cu o singură deschidere	...49
3.1.2.1. Grinda încastrată-simplu rezemată	...50
3.1.2.2. Grinda dublu încastrată	...51
3.1.3. Efectul acțiunii variației de temperatură la grinzile continue	...54
3.1.4. Efectul cedărilor de rezeme la grinzile continue	...56
3.2. Grinzi cu zăbrele static nedeterminate	...61
3.3. Arce static nedeterminate	...66

3.3.1. Arcul dublu articulat	...66
3.3.2. Arcul cu tirant	...72
3.3.3. Arcul dublu încastrat	...81
CAPITOLUL IV Metoda deplasărilor	...92
4.1. Principii generale	...92
4.1.1. Structuri cu noduri fixe. Structuri cu noduri deplasabile	...92
4.1.2. Sistem de bază. Ecuații de condiție.	...95
4.1.3. Convenție de semne pentru rotiri și momente încovoietoare	...97
4.1.4. Relații între eforturi și încărcări la barele sistemului sistemului de bază.	...98
4.1.4.1. Cazul barei dublu încastrate	...99
4.1.4.2. Cazul barei încastrată – articulată	..104
4.2. Structuri cu noduri fixe	..105
4.3. Structuri cu noduri deplasabile	..116
4.3.1. Structuri cu stâlpi verticali	..117
4.3.2. Structuri cu stâlpi înclinați și/sau rigle în două pante	..126
4.4. Structuri simetrice	..134
4.4.1. Procedul semistructurilor	..136
4.4.2. Procedul grupării necunoscute	..139
4.5. Efectul variației de temperatură	..144
4.6. Efectul cedărilor de reazeme	..151
CAPITOLUL V Aplicații ale metodei deplasărilor. Calculul Structurilor prin aproximații succesive	..154
5.1 Structuri cu noduri fixe	..155
5.1.1. Procedul distribuirii și transmiterii momentelor (Procedul Cross)	..155
5.2 Structuri cu noduri deplasabile	..170
5.2.1. Procedul de rezolvare în două etape	..170
BIBLIOGRAFIE	..193
CUPRINS	..194